CdL in Scienze Statistiche ed Economiche - Università degli Studi di Milano-Bicocca

Lezione : Distanze

Docente: Aldo Solari

1 Distanze

L'analisi di raggruppamento (*cluster analysis*) ha per scopo far emergere dall'insieme dei dati a disposizione gruppi di unità statistiche "simili" tra loro e "dissimili" da quelle degli altri gruppi. Che cosa si intende per unità statistiche "simili", o equivalentemente, "dissimili"? Dobbiamo quantificare con un numero la "diversità" tra due unità statistiche

- Variabili Quantitative: Diversità = Distanza (Metrica e Indice di Distanza)
- Variabili Qualitative: Diversità = Indice di Dissimilarità

1.1 La funzione distanza

Consideriamo misurazioni su p variabili tutte quantitative. Quanto sono "distanti" due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i}$ e $\underset{1\times p}{u_l}$? Dipende da come definiamo la "distanza".

In generale, una distanza è una funzione

$$d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

che associa ad una coppia di unità statistiche u_i e u_l un numero reale

Proprietà di una distanza:

(D1) Non negatività	$d(u_i, u_l) \geq 0$
(D2) Identità	$d(u_i, u_l) = 0 \Leftrightarrow u_i = u_l$
(D3) Simmetria	$d(u_i, u_l) = d(u_l, u_i)$
(D4) Disuguaglianza triangolare	$d(u_i, u_l) \leq d(u_i, u_t) + d(u_t, u_l)$

- METRICA: valgono (D1), (D2), (D3) e (D4)
- INDICE DI DISTANZA: valgono (D1), (D2) e (D3)

- Distanza Euclidea d_2 tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_2(u_i, u_l) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p}(x_{ij} - x_{lj})^2}$$

  d_2 soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3) e (D4), quindi è una metrica

- Distanza di Manhattan (o della città a blocchi) d_1 tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_1(u_i, u_l) = \sum_{j=1}^{p}|x_{ij} - x_{lj}|$$

  d_1 soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3) e (D4), quindi è una metrica

- Distanza di Lagrange d_∞ tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_\infty(u_i, u_l) = \max_{j\in\{1\ldots,p\}}|x_{ij} - x_{lj}|$$

  d_∞ soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3) e (D4), quindi è una metrica

Example 1.1. $\underset{1\times 2}{u_1'} = [1\ 1]$, $\underset{1\times 2}{u_2'} = [2\ 3]$
$d_2(u_1, u_2) = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$
$d_1(u_1, u_2) = |1-2| + |1-3| = 3$
$d_\infty(u_1, u_2) = \max\{|1-2|, |1-3|\} = 2$

1.2 Distanza di Minkowski

Distanza di Minkowski d_m (di ordine $m \geq 1$) tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_m(u_i, u_l) = \left[\sum_{j=1}^{p}|x_{ij} - x_{lj}|^m\right]^{1/m}$$

- Per $m \geq 1$, d_m soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3) e (D4), quindi è una metrica
- Casi particolari: distanza Euclidea ($m = 2$), di Manhattan ($m = 1$) e di Lagrange ($m = \infty$)
- E' funzione non crescente dell'indice m

$$d_{m'}(u_i, u_l) \geq d_{m''}(u_i, u_l) \quad 1 \leq m' < m''$$

1.3 Distanza di Canberra

Distanza di Canberra d_C tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_C(u_i, u_l) = \sum_{j=1}^{p} \frac{|x_{ij} - x_{lj}|}{|x_{ij} + x_{lj}|}$$

- Sono esclusi dalla somma i termini in cui il denominatore si annulla
- E' utilizzata per variabili quantitative non negative
- E' una versione pesata della distanza di Manhattan

$$d_C(u_i, u_l) = \sum_{j=1}^{p} w_j |x_{ij} - x_{lj}|$$

con pesi $w_j = \dfrac{1}{|x_{ij} + x_{lj}|}$, $j = 1, \ldots, p$

1.4 Distanza Euclidea al quadrato

- Distanza Euclidea al quadrato

$$d_2^2(u_i, u_l) = \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{lj})^2$$

- La distanza Euclidea al quadrato d_2^2 soddisfa (D1), (D2) e (D3) ma non soddisfa (D4), quindi è un indice di distanza
- Tuttavia, d_2^2 gode della proprietà di addittività (mentre la distanza Euclidea d_2 no):

  per due insiemi K e Q tali che $K \cup Q = \{1, \ldots, p\}$ e $K \cap Q = \emptyset$

$$d_2^2(u_i, u_l) = \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{lj})^2 = \sum_{k \in K} (x_{ik} - x_{lk})^2 + \sum_{q \in Q} (x_{iq} - x_{lq})^2$$

Example 1.2. $\underset{1\times 2}{u_1'} = [\,10 \;\; 5\,]$
$\underset{1\times 2}{u_2'} = [\,13 \;\; 9\,]$
$\underset{1\times 2}{u_3'} = [\,11 \;\; 7\,]$
$d_2^2(u_1, u_2) = (10-13)^2 + (5-9)^2 = 25$
$d_2^2(u_1, u_3) = (10-11)^2 + (5-7)^2 = 5$
$d_2^2(u_3, u_2) = (11-13)^2 + (7-9)^2 = 8$
$25 = d_2^2(u_1, u_2) > d_2^2(u_1, u_3) + d_2^2(u_3, u_2) = 5 + 8 = 13$

2 Distanza di Mahalanobis

Tra due unità statistiche $\underset{1\times p}{u_i'}$ e $\underset{1\times p}{u_l'}$

$$d_M(u_i, u_l) = \sqrt{\underset{1\times p}{(u_i - u_l)'} \underset{p\times p}{S^{-1}} \underset{p\times 1}{(u_i - u_l)}}$$

Tra l'i-sima unità statistica $\underset{1\times p}{u_i'}$ e il baricentro $\underset{1\times p}{\bar{x}'}$:

$$d_M(u_i, \bar{x}) = \sqrt{\underset{1\times p}{(u_i - \bar{x})'} \underset{p\times p}{S^{-1}} \underset{p\times 1}{(u_i - \bar{x})}}$$

L'insieme dei punti p-dimensionali $\underset{1\times p}{u'}$ con distanza di Mahalanobis costante $c > 0$ dal baricentro $\underset{1\times p}{\bar{x}'}$ soddisfano l'equazione

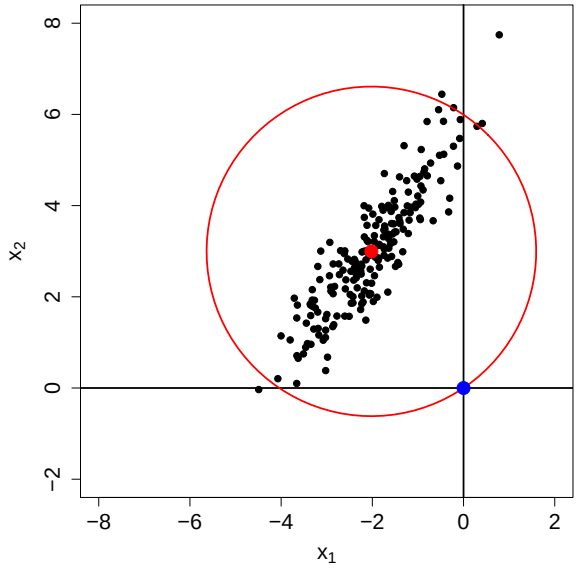
$$\underset{1\times p}{(u - \bar{x})'} \underset{p\times p}{S^{-1}} \underset{p\times 1}{(u - \bar{x})} = c^2$$

che definisce un iper-ellissoide

Si noti che l'insieme di punti p-dimensionali $\underset{1\times p}{u'}$ con distanza Euclidea costante $c > 0$ dal baricentro $\underset{1\times p}{\bar{x}'}$ soddisfano l'equazione

$$\underset{1\times p}{(u - \bar{x})'} \underset{p\times 1}{(u - \bar{x})} = c^2$$

che definisce una ipersfera di raggio c dal baricentro



2.1 Distanza di Mahalanobis e valori anomali

Se si può assumere che le righe della matrice X sono realizzazioni indipendenti generate dalla medesima distribuzione Normale p-variata, possiamo definire l'i-sima unità statistica $\underset{1\times p}{u_i'}$ un outlier se

$$d_M^2(u_i, \bar{x}) > q_{0.95}$$

dove $q_{0.95}$ è il 0.95 quantile di una distribuzione χ^2 con p gradi di libertà

p	$q_{0.95}$
1	3.8415
2	5.9915
3	7.8147
5	11.0705
10	18.3070
100	124.3421

Se le n unità statistiche sono realizzazioni indipendenti generate dalla medesima distribuzione Normale p-variata

$$\text{valore atteso di outliers} = n \times 0.05$$

Qualora osserviamo un numero sostanzialmente più elevato di quello atteso, abbiamo un eccesso di *outliers*

Example 2.1. *Dati Animals*

i		$d_M^2(u_i, \bar{x})$	i		$d_M^2(u_i, \bar{x})$
1	*Mountain beaver*	*3.339*	*15*	*African elephant*	*5.445*
2	*Cow*	*1.529*	*16*	*Triceratops*	22.392
3	*Grey wolf*	*0.134*	*17*	*Rhesus monkey*	*4.12*
4	*Goat*	*0.328*	*18*	*Kangaroo*	*0.014*
5	*Guinea pig*	*3.533*	*19*	*Golden hamster*	8.51
6	*Dipliodocus*	26.092	*20*	*Mouse*	14.908
7	*Asian elephant*	*2.963*	*21*	*Rabbit*	*2.243*
8	*Donkey*	*0.343*	*22*	*Sheep*	*0.082*
9	*Horse*	*1.348*	*23*	*Jaguar*	*0.169*
10	*Potar monkey*	*2.087*	*24*	*Chimpanzee*	*0.795*
11	*Cat*	*2.573*	*25*	*Rat*	6.249
12	*Giraffe*	*1.346*	*26*	*Brachiosaurus*	38.629
13	*Gorilla*	*0.423*	*27*	*Mole*	11.303
14	*Human*	*2.084*	*28*	*Pig*	*0.782*

3 Distanze e trasformazioni lineari

3.1 Invarianza di d_M rispetto alle trasformazioni lineari

La trasformazione lineare dell' i-sima unità statistica $\underset{1\times p}{u_i'} = \underset{1\times p}{x_i'}$

$$\underset{1\times p}{y_i'} = \underset{1\times p}{x_i'}\,\underset{p\times p}{A'} + \underset{1\times p}{b'}$$

è definita da

- la matrice $\underset{p\times p}{A}$
- il vettore $\underset{p\times 1}{b}$

La matrice dei dati linearmente trasformati risulta

$$\underset{n\times p}{Y} = \underset{n\times p}{X}\,\underset{p\times p}{A'} + \underset{n\times 1}{1}\,\underset{1\times p}{b'}$$

con con vettore delle medie e matrice di varianze/covarianze

$$\underset{p\times 1}{\bar{y}} = \underset{p\times p}{A}\,\underset{p\times 1}{\bar{x}} + \underset{p\times 1}{b}, \qquad \underset{p\times p}{S^Y} = \underset{p\times p}{A}\,\underset{p\times p}{S^X}\,\underset{p\times p}{A'}$$

Si noti che ci stiamo limitando a considerare trasformazioni lineari delle unità statistiche da $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^p$, ovvero trasformazioni lineari che non riducono la dimensionalità originale p.

Proposition 3.1. *Siano* $\underset{1\times p}{y_i'} = \underset{1\times p}{x_i'}\,\underset{p\times p}{A'} + \underset{1\times p}{b'}$ *e* $\underset{1\times p}{y_l'} = \underset{1\times p}{x_l'}\,\underset{p\times p}{A'} + \underset{1\times p}{b'}$ *con* $\underset{p\times p}{A}$ *non singolare. La distanza di Mahalanobis* d_m *è invariate rispetto alle trasformazioni lineari (non singolari):*

$$\begin{aligned} d_M(y_i, y_l) &= \sqrt{(y_i - y_l)'[S^Y]^{-1}(y_i - y_l)} \\ &= \sqrt{(Ax_i + b - Ax_l - b)'[AS^XA']^{-1}(Ax_i + b - Ax_l - b)} \\ &= \sqrt{[A(x_i - x_l)]'[AS^XA']^{-1}[A(x_i - x_l)]} \\ &= \sqrt{(x_i - x_l)'A'[A']^{-1}[S^X]^{-1}[A]^{-1}A(x_i - x_l)} \\ &= d_M(u_i, u_l) \end{aligned}$$

ricordando che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.2 Invarianza di d_m rispetto alle traslazioni

Una traslazione è un caso particolare di trasformazione lineare con

- $\underset{p\times p}{A} = \underset{p\times p}{I}$

- $\underset{1\times p}{b'}$ arbitraria

Traslazione della matrice dei dati X

$$\underset{n\times p}{Y} = \underset{n\times p}{X} + \underset{n\times 1}{1}\,\underset{1\times p}{b'}$$

con vettore delle medie e matrice di varianze/covarianze

$$\underset{p\times 1}{\bar{y}} = \underset{p\times 1}{\bar{x}} + \underset{p\times 1}{b}, \qquad \underset{p\times p}{S^Y} = \underset{p\times p}{S^X}$$

Proposition 3.2. *Siano* $\underset{1\times p}{y_i'} = \underset{1\times p}{x_i'} + \underset{1\times p}{b'}$ *e* $\underset{1\times p}{y_l'} = \underset{1\times p}{x_l'} + \underset{1\times p}{b'}$ *La distanza di Minkowski* d_m *è invariate rispetto alle traslazioni:*

$$\begin{aligned} d_m(y_i, y_l) &= \left[\sum_{j=1}^{p} |y_{ij} - y_{lj}|^m\right]^{1/m} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{p} |(x_{ij} + b_j) - (x_{lj} + b_j)|^m\right]^{1/m} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{p} |x_{ij} - x_{lj}|^m\right]^{1/m} \\ &= d_m(u_i, u_l) \end{aligned}$$

3.3 Invarianza di d_2 rispetto alle trasformazioni ortogonali

- $\underset{p\times p}{A}$ matrice ortogonale: $\underset{p\times p}{A'} = \underset{p\times p}{A^{-1}}$ e $\underset{p\times pp\times p}{A'}\,\underset{p\times pp\times p}{A} = \underset{p\times pp\times p}{A}\,\underset{p\times pp\times p}{A'} = \underset{p\times p}{I}$
- $\underset{1\times p}{b'} = \underset{1\times p}{0}$

Trasformazione ortogonale della matrice dei dati X

$$\underset{n\times p}{Y} = \underset{n\times pp\times p}{X}\,\underset{p\times p}{A'}$$

con vettore delle medie e matrice di varianze/covarianze

$$\underset{p\times 1}{\bar{y}} = \underset{p\times pp\times 1}{A}\,\underset{p\times 1}{\bar{x}}, \quad \underset{p\times p}{S^Y} = \underset{p\times pp\times pp\times p}{A\,S^X\,A'}$$

Esempi di trasformazioni ortogonali sono:

- Trasformazione identità: $\underset{p\times p}{A} = \underset{p\times p}{I}$

- Permutazione: $\underset{p\times p}{A}$ è una matrice di permutazione che si ottiene permutando le righe (o le colonne) della matrice identità $\underset{p\times p}{I}$. In due dimensioni, la seguente matrice di permutazione comporta scambiare l'ordine due delle colonne di X:

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rotazione: $\underset{p\times p}{A}$ è una matrice di rotazione, ovvero $\underset{p\times p}{A}$ ortogonale con $\det(A) = 1$ o -1. In due dimensioni, la seguente matrice di rotazione comporta una rotazione antioraria di angolo θ radianti intorno all'origine:

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Proposition 3.3. *Siano* $\underset{1\times p}{y_i'} = \underset{1\times p}{x_i'}\underset{p\times p}{A'}$ *e* $\underset{1\times p}{y_l'} = \underset{1\times p}{x_l'}\underset{p\times p}{A'}$ *con* $\underset{p\times p}{A}$ *matrice ortogonale. La distanza Euclidea* d_2 *è invariate rispetto alle trasformazioni ortogonali:*

$$\begin{aligned} d_2(y_i, y_l) &= \sqrt{(y_i - y_l)'(y_i - y_l)} \\ &= \sqrt{(Ax_i - Ax_l)'(Ax_i - Ax_l)} \\ &= \sqrt{[A(x_i - x_l)]'[A(x_i - x_l)]} \\ &= \sqrt{(x_i - x_l)'A'A(x_i - x_l)} \\ &= \sqrt{(x_i - x_l)'A^{-1}A(x_i - x_l)} \\ &= \sqrt{(x_i - x_l)'(x_i - x_l)} \\ &= d_2(x_i, x_l) \end{aligned}$$

3.4 Distanza Euclidea calcolata su $\tilde{X}$, Z e $\tilde{Z}$

- $\underset{1\times p}{\tilde{x}_i'} = \underset{1\times p}{(u_i - \bar{x})'}$ è l'i-sima riga di $\underset{n\times p}{\tilde{X}} = \underset{n\times nn\times p}{H}\ \underset{}{X}$

$$d_2(\tilde{x}_i, \tilde{x}_l) = \sqrt{\underset{1\times p}{(u_i - u_l)'}\underset{p\times 1}{(u_i - u_l)}} = d_2(u_i, u_l)$$

- $\underset{1\times p}{z_i'} = \underset{1\times p}{(u_i - \bar{x})'}\underset{p\times p}{D^{-\frac{1}{2}}}$ è l'i-sima riga di $\underset{n\times p}{Z} = \underset{n\times nn\times p}{H}\ \underset{}{X}\ \underset{p\times p}{D^{-\frac{1}{2}}}$

$$d_2(z_i, z_l) = \sqrt{\underset{1\times p}{(u_i - u_l)'}\underset{p\times p}{D^{-1}}\underset{p\times 1}{(u_i - u_l)}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{s_{jj}}(x_{ij} - x_{lj})^2}$$

- $\underset{1\times p}{\tilde{z}_i'} = \underset{1\times p}{(u_i - \bar{x})'}\underset{p\times p}{S^{-\frac{1}{2}}}$ è l'i-sima riga di $\underset{n\times p}{\tilde{Z}} = \underset{n\times nn\times p}{H}\ \underset{}{X}\ \underset{p\times p}{S^{-\frac{1}{2}}}$

$$d_2(\tilde{z}_i, \tilde{z}_l) = \sqrt{\underset{1\times p}{(u_i - u_l)'}\underset{p\times p}{S^{-1}}\underset{p\times 1}{(u_i - u_l)}} = d_M(u_i, u_l)$$

4 Indici di similarità

Consideriamo misurazioni su p variabili, qualitative e/o quantitative. Ciascuna unità statistica presenta misurazioni appartenenti allo spazio campionario $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_p$. Ad esempio, se abbiamo $p = 2$ variabili, `Sesso` e `Posizione geografica`, lo spazio campionario è:

$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\text{Sesso}} \times \mathcal{X}_{\text{Pos.Geog.}} = \{\texttt{M}, \texttt{F}\} \times \{\texttt{Nord}, \texttt{Centro}, \texttt{Sud}\} = \{(\texttt{M}, \texttt{Nord}), (\texttt{F}, \texttt{Nord}), (\texttt{M}, \texttt{Centro}), (\texttt{F}, \texttt{Centro}), (\texttt{M}, \texttt{Sud}), (\texttt{F}, \texttt{Sud})\}$

4.1 Indice di similarità

In generale, un indice di similarità è una funzione

$$s : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

che associa ad una coppia di unità statistiche u_i' e u_l' un numero reale.
Un indice di similarità soddisfa le seguenti proprietà:

(S1) Non negatività	$s(u_i, u_l) \geq 0$
(S2) Normalizzazione	$u_i = u_l \Rightarrow s(u_i, u_l) = 1$
(S3) Simmetria	$s(u_i, u_l) = s(u_l, u_i)$

dove 1 è il massimo valore assumibile dall'indice di similarità.
Un indice di dissimilarità è definito come

$$d(u_i, u_j) = 1 - s(u_i, u_j)$$

e soddisfa (D1) e (D3)

4.2 Variabili binarie

Supponiamo che il profilo dell'i-esima unità statistica u_i' sia composto di sole variabili binarie (o dicotomiche), codificate per comodità come 0 e 1

$$\underset{n \times p}{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ \cdots \\ u_i' \\ \cdots \\ u_l' \\ \cdots \\ u_n' \end{bmatrix}$$

Possiamo costruire, per ciascuna coppia u'_i e u'_l, la seguente tabella di contingenza

	unit l		
unit i	1	0	
1	a	b	$a+b$
0	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	$p=a+b+c+d$

dove

- a è la frequenza di variabili binarie con valore 1 per l'unità i e valore 1 per l'unità l
- b è la frequenza di variabili binarie con valore 1 per l'unità i e valore 0 per l'unità l
- etc.

Example 4.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}$$

	u_2		
u_1	1	0	
1	2	1	3
0	1	1	2
	3	2	$p=5$

4.2.1 Indice di corrispondenza e di Jaccard

Consideriamo 1 come 'presenza' e 0 come 'assenza' . Non è ovvio se la contemporanea presenza 1-1 o la contemporanea assenza 0-0 siano egualmente indicativi di somiglianza. Ad esempio, se le unità sono individui e la variabile binaria è "capelli castani (1)/capelli non castani (0)" la contemporanea presenza 1-1 è indubbiamente indicativa di somiglianza, non così la contemporanea assenza 0-0. Si parla in questo caso di variabile binaria *asimmetrica*. Per contro se la variabile binaria è "maschio (1)/femmina (0)" la contemporanea assenza 0-0 ha lo stesso valore della contemporanea presenza 1-1. Si parla in questo caso di variabile binaria *simmetrica*.

Indice di corrispondenza semplice

$$s_c(u_i, u_l) = \frac{a+d}{p}$$

considera allo stesso modo co-presenze 1-1 e co-assenze 0-0, quindi è opportuno per variabili binarie simmetriche

Indice di Jaccard

$$s_J(u_i, u_j) = \frac{a}{a+b+c}$$

ignora le coassenze 0-0 (ed è indeterminato se $d = p$), quindi è opportuno per variabili binarie asimmetriche

Per l'esempio precedente abbiamo

$$s_c(u_1, u_2) = \frac{3}{5} = 0.6, \quad s_J(u_1, u_2) = \frac{2}{4} = 0.5$$

Example 4.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$$

Per ciascuna coppia di osservazioni calcoliamo la tabella di contingenza, ottenendo le tre tabelle

$u_1 \setminus u_2$	*1*	*0*
1	*2*	*2*
0	*1*	*0*

$u_1 \setminus u_3$	*1*	*0*
1	*1*	*3*
0	*0*	*1*

$u_2 \setminus u_3$	*1*	*0*
1	*1*	*2*
0	*0*	*2*

$s_c(u_1, u_2) = 2/5$, $s_c(u_1, u_3) = 2/5$, $s_c(u_2, u_3) = 3/5$
$s_J(u_1, u_2) = 2/5$, $s_J(u_1, u_3) = 1/4$, $s_J(u_2, u_3) = 1/3$
Si noti che u_1 è equi-somigliante a u_2 e u_3 secondo s_c, mentre è più somigliante a u_2 che a u_3 secondo s_J, questo poichè la co-assenza che lo accomuna a u_3 non ha peso nell'indice di Jaccard.

4.3 Variabili qualitative nominali

Se tutte le variabili sono qualitative nominali (`factor` in `R`), possiamo considerare come indice di corrispondenza semplice la proporzione di variabili in cui le due unità u_i' e u_j' assumono la stessa modalità

$$s_c(u_i, u_j) = \frac{\sum_{j=1}^{p} I\{x_{ij} = x_{lj}\}}{p}$$

dove $I\{\cdot\}$ rappresenta la funzione indicatrice

4.4 Variabili qualitative ordinali

Variabili qualitative ordinali (`Ord.factor` in `R`) con modalità ordinate, ad esempio, `mai` $\prec$ `qualche volta` $\prec$ `spesso` $\prec$ `sempre`.
Trattare queste variabili come qualitative non ordinate, sebbene possibile, fa perdere l'informazione relativa all'ordinamento delle modalità (`mai` e `qualche volta` sono misurate egualmente 'distanti' di `mai` e `sempre`).
Se la j-sima variabile è qualitativa ordinale, una soluzione alternativa consiste nel trasformare le m_j modalità ordinate nei corrispondenti numeri interi da 1 a m_j normalizzando il risultato:

$$y_{ij} = \frac{\text{punteggio}(x_{ij}) - 1}{m_j - 1}$$

e trattare la j-sima variabile come quantitativa
In questo caso si assume che le 'distanze' tra le categorie ordinate sono le stesse
Ad esempio

Modalità	`mai`	`qualche volta`	`spesso`	`sempre`
Punteggio	1	2	3	4
y_{ij}	0	1/3	2/3	1

4.5 Variabili miste: indice di Gower

$$s_G(u_i, u_l) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \delta_{il}(j) s_{il}(j)}{\sum_{j=1}^{p} \delta_{il}(j)}$$

dove

$$s_{il}(j) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_{ij} - x_{lj}|}{\text{range } j\text{-sima variabile}} & \text{se } j\text{-sima variabile quantitativa} \\ I(x_{ij} = x_{lj}) & \text{se } j\text{-sima variabile binaria/nominale} \\ 1 - |y_{ij} - y_{lj}| & \text{se } j\text{-sima variabile ordinale} \end{cases}$$

$$\delta_{il}(j) = \begin{cases} 1 & i, l \text{ confrontabili rispetto } j\text{-sima variabile} \\ 0 & i, l \text{ non confrontabili rispetto } j\text{-sima variabile} \end{cases}$$

dove due unità sono non confrontabili rispetto alla j-sima variabile se c'è un valore mancante in almeno una delle due o se la j-sima variabile è binaria asimmetrica e si ha co-assenza 0-0.

4.6 Matrice delle distanze/dissimilarità

A $\underset{n\times p}{X}$ si associa una matrice $\underset{n\times n}{D}$ delle distanze/dissimilarità tra le n unità statistiche

$$\underset{n\times n}{D} = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1i} & \cdots & d_{1n} \\ & 0 & \cdots & d_{2i} & \cdots & d_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & d_{in} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

dove

- $d_{il} = d(u_i, u_l)$
- $d_{il} = d_{li}$ (la matrice è simmetrica)
- $d_{ii} = 0$