CdL in Scienze Statistiche ed Economiche - Università degli Studi di Milano-Bicocca

Lezione : Spazio delle variabili e delle osservazioni

Docente: Aldo Solari

1 Introduzione

Iniziamo con una breve introduzione alla notazione e terminologia che verrà utilizzata nel seguito. Si scriverà

$$\underset{n\times 1}{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{array}\right]$$

per indicare un vettore (colonna) di dimensione $n \times 1$. Per convenzione, i vettori saranno sempre interpretati come vettori colonna. Un vettore riga verrà indicato con y' dove l'apice $'$ indica l'operatore di trasposizione:

$$\underset{1\times n}{y'} = \left[\begin{array}{ccccc} y_1 & \cdots & y_i & \cdots & y_n \end{array}\right]$$

Questa convenzione permetterà di riconoscere immediatamente che $x'y$ è uno scalare mentre xy' è una matrice $n \times n$.

Si presume una conoscenza delle nozioni di algebra delle matrici, ad esempio la somma fra matrici, la moltiplicazione di una matrice per uno scalare, e il prodotto tra due matrici. Alcuni richiami sono presenti nell'appendice che trovate in coda alle slides.

Prodotto scalare

Per due vettori x e y di dimensione $n \times 1$, il *prodotto scalare* (*Euclidean inner product*) di x e y è dato da

$$\langle x, y \rangle = x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Si noti che il prodotto interno è uno scalare.

Prodotto matrice-vettore

Un caso particolare di prodotto tra due matrici si verifica quando la seconda matrice è un vettore colonna x, i.e. il prodotto matrice-vettore Ax. Un modo di vedere questo prodotto è come somma pesata (combinazione lineare) delle colonne di A. Supponiamo

$$\underset{m\times n}{A} = [a_1 \ \cdots \ a_j \ \cdots \ a_n] \quad \text{dove} \quad \underset{m\times 1}{a_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Allora

$$Ax = x_1 \underset{m\times 1}{a_1} + \ldots + x_n \underset{m\times 1}{a_n}$$

Ad esempio, per

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

abbiamo

$$Ax = 3\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione tra due matrici

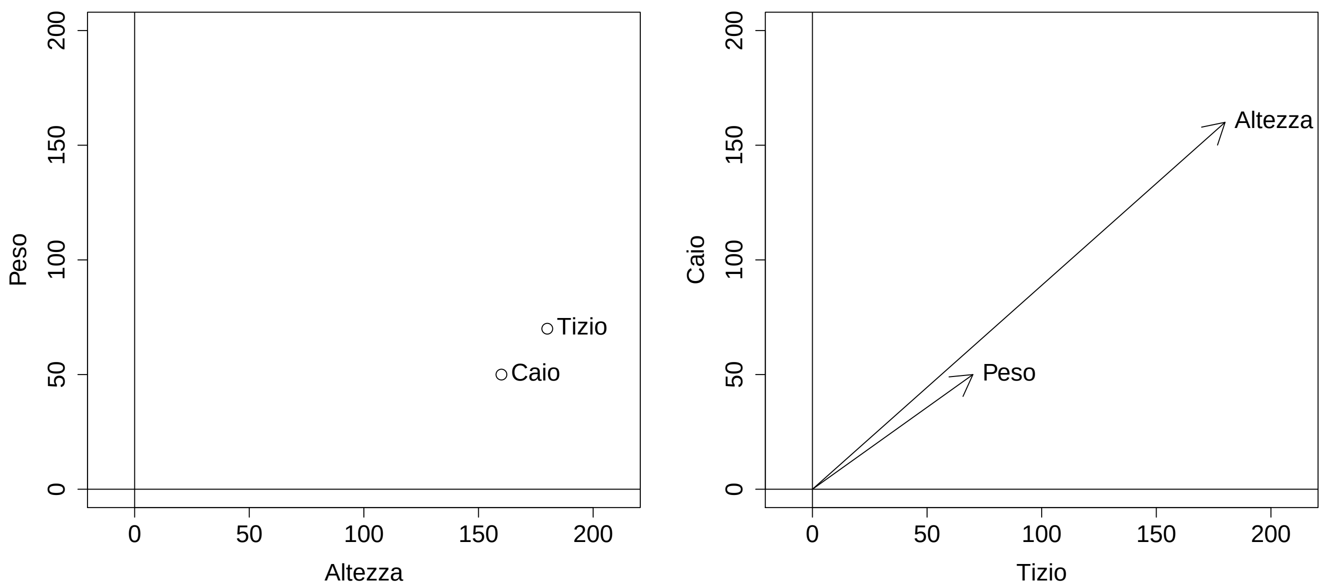
Per la moltiplicazione tra due matrici, $\underset{m\times n}{A}$ e $\underset{n\times p}{B} = [b_1 \ \cdots \ b_j \ \cdots \ b_p]$, abbiamo

$$AB = A[b_1 \ \cdots \ b_p] = [Ab_1 \ \cdots \ Ab_p]$$

2 Tizio e Caio

	Altezza	Peso
Tizio	180	70
Caio	160	50

Nello spazio delle variabili (sinistra, due punti bidimensionali) e delle osservazioni (destra, due vettori in $\mathbb{R}^2$)



3 Spazio delle variabili

Spazio delle variabili: n **punti** p-dimensionali

$$\underset{n\times p}{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_i' \\ \cdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \cdots \\ u_i' \\ \cdots \\ u_n' \end{bmatrix}$$

dove

$$\underset{1\times p}{x_i'} = \underset{1\times p}{u_i'} = [x_{i1} \cdots x_{ij} \cdots x_{in}]$$

rappresenta l'i-sima unità statistica. Il vettore delle medie trasposto

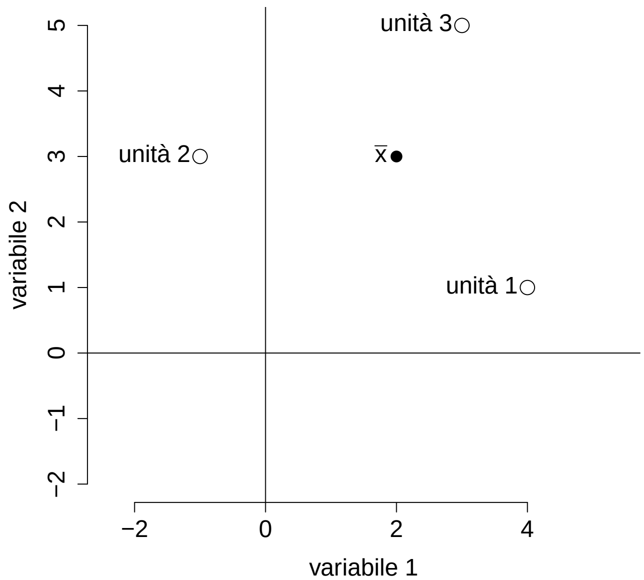
$$\underset{1\times p}{\bar{x}'} = [\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_j \cdots \bar{x}_p]$$

può essere interpretato come il **baricentro** di n punti p-dimensionali

Example 3.1.

$$\underset{3\times 2}{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1\times 2}{\bar{x}'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$



4 Spazio delle osservazioni

Spazio delle osservazioni: p **vettori** in $\mathbb{R}^n$

$$\underset{n\times p}{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{n\times 1}{x_1} & \underset{n\times 1}{x_2} & \cdots & \underset{n\times 1}{x_j} & \cdots & \underset{n\times 1}{x_p} \end{bmatrix}$$

dove

$$\underset{n\times 1}{x_j} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \cdots \\ x_{ij} \\ \cdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

è il j-simo vettore colonna.

4.1 Scomposizione di un vettore

Possiamo scomporre un vettore $\underset{n\times 1}{x_j}$ in due componenti

$$\underset{n\times 1}{x_j} = \bar{x}_j \underset{n\times 1}{1} + \underset{n\times 1}{\tilde{x}_j}$$

- vettore media j-sima: $\bar{x}_j \underset{n\times 1}{1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_j \\ \cdots \\ \bar{x}_j \\ \cdots \\ \bar{x}_j \end{bmatrix}$ dove $\underset{n\times 1}{1}$ è il vettore unitario

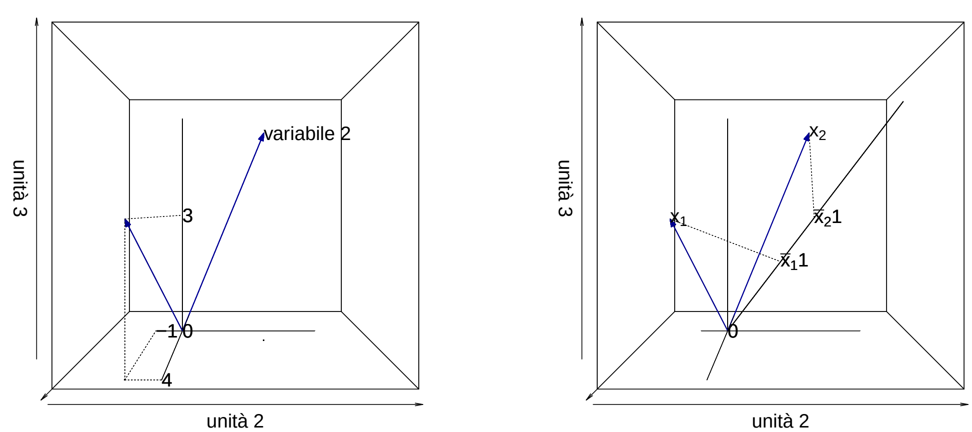
- vettore scarto dalla media j-sima: $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_j} = \begin{bmatrix} x_{1j} - \bar{x}_j \\ \cdots \\ x_{ij} - \bar{x}_j \\ \cdots \\ x_{nj} - \bar{x}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \cdots \\ x_{ij} \\ \cdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_j \\ \cdots \\ \bar{x}_j \\ \cdots \\ \bar{x}_j \end{bmatrix} = \underset{n\times 1}{x_j} - \bar{x}_j \underset{n\times 1}{1}$

Observation 4.1. *I vettori $\tilde{x}_j$ e $\bar{x}_j 1$ sono perpendicolari*

$$\langle \bar{x}_j 1, \tilde{x}_j \rangle = (\bar{x}_j 1)' \tilde{x}_j = \bar{x}_j \sum_{i=1}^{n} 1(x_{ij} - \bar{x}_j) = 0$$

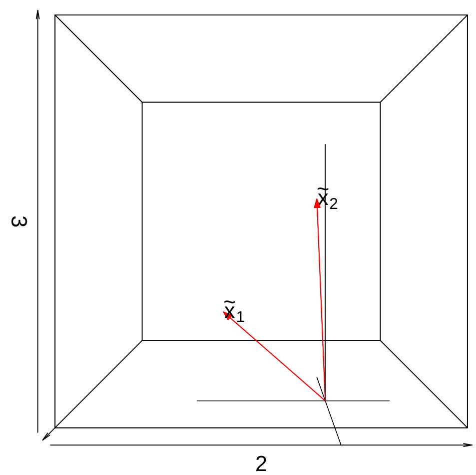
Example 4.2.

$$\underset{3\times 2}{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$



$$\underset{3\times 1}{\tilde{x}_1} = \underset{3\times 1}{x_1} - \bar{x}_1 \underset{3\times 1}{1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times 1}{\tilde{x}_2} = \underset{3\times 1}{x_2} - \bar{x}_2 \underset{3\times 1}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Observation 4.3. *Il quadrato della lunghezza di* $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_j}$ *è la* ***devianza*** *(n volte la varianza)*

$$\boxed{\| \underset{n\times 1}{\tilde{x}_j} \|^2 = \underset{1\times n}{\tilde{x}'_j} \underset{n\times 1}{\tilde{x}_j} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = n s_{jj}}$$

Observation 4.4. *Il prodotto di* $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_j}$ *e* $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_k}$ *è la* ***codevianza*** *(n volte la covarianza)*

$$\boxed{\langle \tilde{x}_j, \tilde{x}_k \rangle = \underset{1\times n}{\tilde{x}'_j} \underset{n\times 1}{\tilde{x}_k} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) = n s_{jk}}$$

Si può dimostrare che

$$\langle \tilde{x}_j, \tilde{x}_k \rangle = \tilde{x}'_j \tilde{x}_k = \|\tilde{x}_j\| \|\tilde{x}_k\| \cos(\theta_{jk})$$

dove θ_{jk} è l'angolo (misurato in radianti) formato dai due vettori $\tilde{x}_j$ e $\tilde{x}_k$ quindi

Observation 4.5. *Il coseno dell'angolo θ_{jk} (misurato in radianti) formato dai due vettori* $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_j}$ *e* $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_k}$ *è la* ***correlazione***

$$\boxed{\cos(\theta_{jk}) = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}}\sqrt{s_{kk}}} = r_{jk}}$$

Example 4.6. $X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

- $\|\tilde{x}_1\|^2 = \tilde{x}_1'\tilde{x}_1 = 14 = 3s_{11}$
- $\|\tilde{x}_2\|^2 = \tilde{x}_2'\tilde{x}_2 = 8 = 3s_{22}$
- $\langle\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\rangle = \tilde{x}_1'\tilde{x}_2 = -2 = 3s_{12}$
- $\cos(\theta_{12}) = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} = -.189 = r_{12}$
- $\theta = \arccos(-.189) = 1.76094$
- $\theta^\circ = \theta\frac{180^\circ}{\pi} = 100.89^\circ$