CdL in Scienze Statistiche ed Economiche - Università degli Studi di Milano-Bicocca

Esercitazione : Spazio delle variabili e delle osservazioni

Esercitatrice: Chiara Gaia Magnani

Example 0.1. *Data la seguente matrice dei dati*

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. Si calcolino il vettore delle medie $\bar{x}$ e i vettori scarto dalla media $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$.
2. Si calcolino la lunghezza dei vettori $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ e il coseno dell'angolo compreso.
3. Si ricavino la matrice di varianze e covarianze S e la matrice di correlazione R facendo riferimento ai risultati ottenuti nel punto precedente.

Dimostrazione. 1 . Risulta

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

da cui si ottengono i vettori scarto dalla media:

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Ricordando che lunghezza di un vettore é uguale alla radice quadrata del prodotto scalare del vettore con se stesso, si ottiene

$$\|\tilde{x}_1\| = \sqrt{\tilde{x}_1'\tilde{x}_1} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \tag{5}$$

$$\|\tilde{x}_2\| = \sqrt{\tilde{x}_2'\tilde{x}_2} = \sqrt{2} \tag{6}$$

Infine indicato con $cos(\theta_{12})$ l'angolo compreso tra i due vettori, si ha

$$cos(\theta_{12}) = \frac{\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle}{\|\tilde{x}_1\| \|\tilde{x}_2\|} = -\frac{1}{2} \tag{7}$$

3. Poiché risulta $cos(\theta_{12}) = r_{12}$, la matrice di correlazione avrá la seguente forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Per ottenere la matrice S é utile ricordare le seguenti relazioni:

$$n\|\tilde{x}_i\|^2 = ns_{ii} \qquad s_{ij} = \frac{\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle}{n}$$

Pertanto si ha

$$S = \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

□

Example 0.2. *Si consideri la matrice dei dati* $\underset{10\times 2}{X}$. *Sapendo che la lunghezza dei due vettori scarto dalla media* $\tilde{x}_1$ *e* $\tilde{x}_2$ *è pari a 4 e 9 rispettivamente, e l'angolo tra* $\tilde{x}_1$ *e* $\tilde{x}_2$ *è pari a 70 gradi, calcolare la matrice di varianze/covarianze* S.

Dimostrazione. Conosciamo la dimensione della matrice, ovvero $n = 10$ righe e $p = 2$ colonne. Le devianze sono $ns_{11} = 4^2$ e $ns_{22} = 9^2$, da cui si possono ricavare le varianze visto che $n = 10$. L'angolo in radianti è pari a $a = (70\pi)/180$ e quindi la correlazione risulta pari a $r_{12} = cos(a)$. Segue che la covarianza s_{12} è pari a $r_{12}\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}$, quindi il risultato è che S ha elementi diagonali 1.6 e 8.1 ed elementi non-diagonali pari a circa 1.23. □