CdL in Scienze Statistiche ed Economiche - Università degli Studi di Milano-Bicocca

Esercitazione : Teorema di Decomposizione Spettrale e SVD

Esercitatrice: Chiara Gaia Magnani

Example 0.1. *Mostrare che il determinante di una matrice quadrata A di dimensioni $p \times p$ può essere espresso come prodotto degli autovalori di A, ovvero*

$$det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$$

Dimostrazione. Si consideri la decomposizione spettrale di A

$$A = V \Lambda V'$$

dove V è la matrice le cui colonne sono gli autovettori normalizzati di A e Λ=diag($\lambda_1, ..., \lambda_p$).
Grazie alle proprietà del determinante,

$$det(A) = det(V)det(\Lambda)det(V') = det(V)det(V')det(\Lambda) = det(VV')det(\Lambda) = det(\Lambda)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata l'ortogonalità di V.
Infine, visto che Λ è una matrice diagonale, $det(\Lambda)$ è pari al prodotto degli elementi sulla sua diagonale. □

Example 0.2. *Si dimostri che una matrice quadrata $\underset{n \times n}{A}$ idempotente (i.e. tale per cui $AA = A$) ha autovalori $\lambda_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Sia λ_i un auto valore di A con corrispondente autovettore $\underset{n \times 1}{v_i}$. Per i arbitrario, abbiamo per definizine di autovalori e autovettori della matrice A

$$\begin{aligned} Av_i &= \lambda_i v_i \\ AAv_i &= \lambda_i Av_i \\ Av_i &= \lambda_i Av_i \\ Av_i &= \lambda_i^2 v_i \\ \lambda_i v_i &= \lambda_i^2 v_i \\ \lambda_i &= \lambda_i^2 \\ \lambda_i(1 - \lambda_i) &= 0 \end{aligned}$$

quindi la soluzione è λ_i pari a 0 oppure pari a 1. □

Example 0.3. *Si calcoli la decomposizione ai valori singolari della matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. La decomposizione ai valori singolari di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}'$$

dove $\mathbf{U}$ è la matrice 3x3 degli autovettori normalizzati di $\mathbf{A}\mathbf{A}'$, $\mathbf{V}$ è la matrice 2x2 degli autovettori normalizzati di $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ e $\mathbf{\Delta}$ è la matrice 3x2 con entrate nulle ovunque ad eccezione dei posti sulla diagonale (j, j) con $j = 1, \ldots, min(3, 2)$ dove compaiono le radici quadrate degli autovalori strettamente positivi di $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ o equivalentemente di $\mathbf{A}\mathbf{A}'$. Innanzitutto, calcoliamo

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \;\; e \;\; \mathbf{H} = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo, ora, autovalori e autovettori di $\mathbf{K}$. Gli autovalori sono le radici dell'equazione caratteristica

$$det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda(8 - \lambda)(\lambda - 10)$$

ovvero $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 8.\lambda_3 = 0$. Per trovare gli autovettori, bisogna risolvere il sistema

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v_i} = \mathbf{0}, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Supponiamo $\mathbf{v_i}' = [x_i \; y_i \; z_i]$ e partiamo da $\lambda_1 = 10$.
Da $(\mathbf{K} - 10\mathbf{I})\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ si ricava il sistema

$$\begin{cases} -8x + 4z = 0 \\ -2y = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

che, unito alla condizione che l'autovettore deve essere normalizzato, ha come soluzione

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

In modo analogo, per $\lambda_2 = 8$ si ricava che l'autovettore è

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, infine, l'autovettore associato a $\lambda_3 = 0$ è

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Ripetendo, ora, lo stesso procedimento per la matrice $\mathbf{H}$, si trova l'equazione caratteristica

$$det(\mathbf{H} - \gamma\mathbf{I}) = (8 - \gamma)(\gamma - 10)$$

che ha radici $\gamma_1 = 10$ e $\gamma_1 = 8$ con i rispettivi autovettori

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \;\; e \;\; \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Quindi, la decomposizione in valori singolari di $\mathbf{A}$ è la seguente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Delta V'} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Si noti che, è valida anche la decomposizione di $\mathbf{A}$ in valori singolari con le matrici ridotte

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Delta V'} = \mathbf{U_r \Delta_r V'_r}$$

dove r è il rango di $\mathbf{A}$ e in questo caso vale 2. Nell'esercizio

$$\mathbf{U_r} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 \\ 2/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{\Delta_r} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix} \;\; e \;\; \mathbf{V_r} = \mathbf{V}$$

□