# La matrice dei dati

## Analisi Esplorativa

Aldo Solari

1. Tipologia di variabili
2. Valori mancanti
3. Valori anomali
4. Matrice dei dati
5. Diagramma di dispersione

# I dati

I dati possono essere rappresentati con una tabella $n \times p$

- $n$ osservazioni o unità statistiche: individui, aziende, etc.
- $p$ variabili o misurazioni o caratteristiche: altezza, sesso, etc.

| | Variabile 1 | $\cdots$ | Variabile $j$ | $\cdots$ | Variabile $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Unità statistica 1 | $x_{11}$ | $\cdots$ | $x_{1j}$ | $\cdots$ | $x_{1p}$ |
| Unità statistica 2 | $x_{21}$ | $\cdots$ | $x_{2j}$ | $\cdots$ | $x_{2p}$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| Unità statistica $i$ | $x_{i1}$ | $\cdots$ | $x_{ij}$ | $\cdots$ | $x_{ip}$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| Unità statistica $n$ | $x_{n1}$ | $\cdots$ | $x_{nj}$ | $\cdots$ | $x_{np}$ |

- $n =$ numerosità dei dati
- $p =$ dimensionalità dei dati

# Esempio

$n = 10$ individui e $p = 5$ variabili:

| | sesso | figli | occhi | salute | peso |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maschio | 0 | Azzurri | Molto Buona | 68.04 |
| 2 | Maschio | 1 | Neri | Molto Buona | 72.57 |
| 3 | Maschio | 0 | Marroni | Media | 61.23 |
| 4 | Maschio | 0 | Neri | Cattiva | 63.50 |
| 5 | Maschio | 1 | Azzurri | Buona | 49.90 |
| 6 | Femmina | 0 | Marroni | Buona | 49.90 |
| 7 | Femmina | 2 | Azzurri | Molto Buona | 54.43 |
| 8 | Femmina | 0 | Marroni | Media | 54.43 |
| 9 | Femmina | 0 | Neri | Media | 47.63 |
| 10 | Femmina | 1 | Neri | Buona | 45.36 |

# Outline



# Tipologia di variabili

Le variabili si suddividono in due tipologie:

### Qualitative

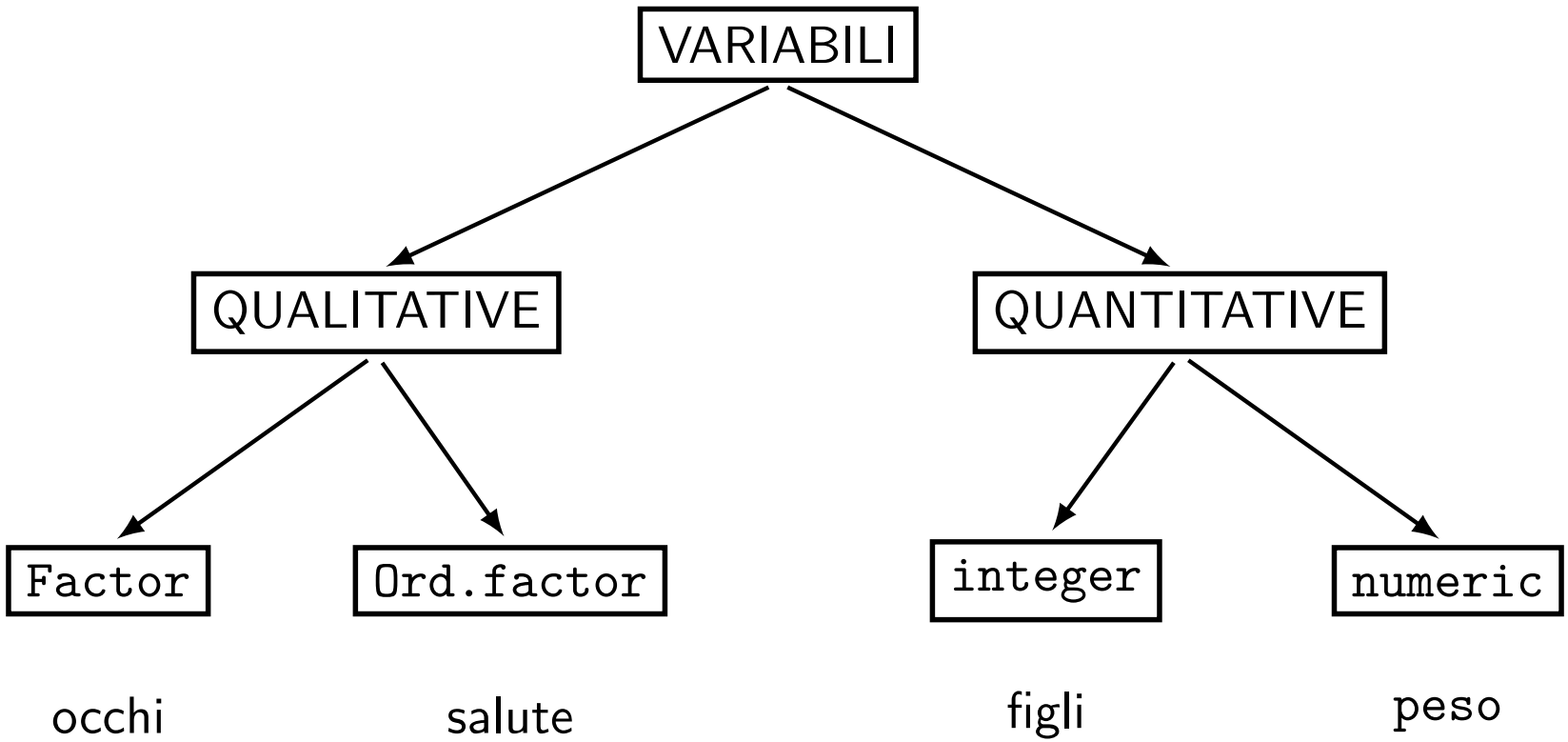
- nominali (`in R: Factor`), se non esiste nessun ordinamento naturale tra le modalità ;
- ordinali (`in R: Ord.factor`), se esiste un ordinamento naturale tra le modalità .

### Quantitative

- discrete (`in R: integer`), quando sono esprimibili da numeri interi
- continue (`in R: numeric`), quando sono esprimibili da numeri reali

Variabili **Dicotomiche**: quando le modalità sono solamente due

# Tipologia di variabili




# Outline



# Valori mancanti (*missing values*)

| | sesso | figli | IQ | occhi | salute | peso |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maschio | 0 | 120 | Azzurri | Molto Buona | 68.04 |
| 2 | Maschio | 1 | | Neri | Molto Buona | 72.57 |
| 3 | Maschio | 0 | | Marroni | Media | 61.23 |
| 4 | Maschio | 0 | 150 | Neri | Cattiva | 63.50 |
| 5 | Maschio | 1 | 92 | Azzurri | Buona | 49.90 |
| 6 | Femmina | 0 | 130 | Marroni | Buona | 49.90 |
| 7 | Femmina | | | Azzurri | Molto Buona | 54.43 |
| 8 | Femmina | 0 | | Marroni | Media | 54.43 |
| 9 | Femmina | 0 | 84 | Neri | Media | 47.63 |
| 10 | Femmina | 1 | 70 | Neri | Buona | 45.36 |

# NA

In R, i valori mancanti vengono codificati con NA (*Not Available*)

| | sesso | figli | IQ | occhi | salute | peso |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maschio | 0 | 120 | Azzurri | Molto Buona | 68.04 |
| 2 | Maschio | 1 | NA | Neri | Molto Buona | 72.57 |
| 3 | Maschio | 0 | NA | Marroni | Media | 61.23 |
| 4 | Maschio | 0 | 150 | Neri | Cattiva | 63.50 |
| 5 | Maschio | 1 | 92 | Azzurri | Buona | 49.90 |
| 6 | Femmina | 0 | 130 | Marroni | Buona | 49.90 |
| 7 | Femmina | NA | NA | Azzurri | Molto Buona | 54.43 |
| 8 | Femmina | 0 | NA | Marroni | Media | 54.43 |
| 9 | Femmina | 0 | 84 | Neri | Media | 47.63 |
| 10 | Femmina | 1 | 70 | Neri | Buona | 45.36 |

Problema: le tecniche di analisi multivariata che andremo a considerare prevedono osservazioni con tutti i valori presenti.

# Esclusione di variabili incomplete

| | sesso | figli | IQ | occhi | salute | peso |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maschio | 0 | 120 | Azzurri | Molto Buona | 68.04 |
| 2 | Maschio | 1 | NA | Neri | Molto Buona | 72.57 |
| 3 | Maschio | 0 | NA | Marroni | Media | 61.23 |
| 4 | Maschio | 0 | 150 | Neri | Cattiva | 63.50 |
| 5 | Maschio | 1 | 92 | Azzurri | Buona | 49.90 |
| 6 | Femmina | 0 | 130 | Marroni | Buona | 49.90 |
| 7 | Femmina | NA | NA | Azzurri | Molto Buona | 54.43 |
| 8 | Femmina | 0 | NA | Marroni | Media | 54.43 |
| 9 | Femmina | 0 | 84 | Neri | Media | 47.63 |
| 10 | Femmina | 1 | 70 | Neri | Buona | 45.36 |

Diminuisce la dimensionalità $p$ dei nostri dati. Però le variabili escluse potrebbero essere proprio quelle di interesse per l'analisi

# Esclusione di osservazioni incomplete

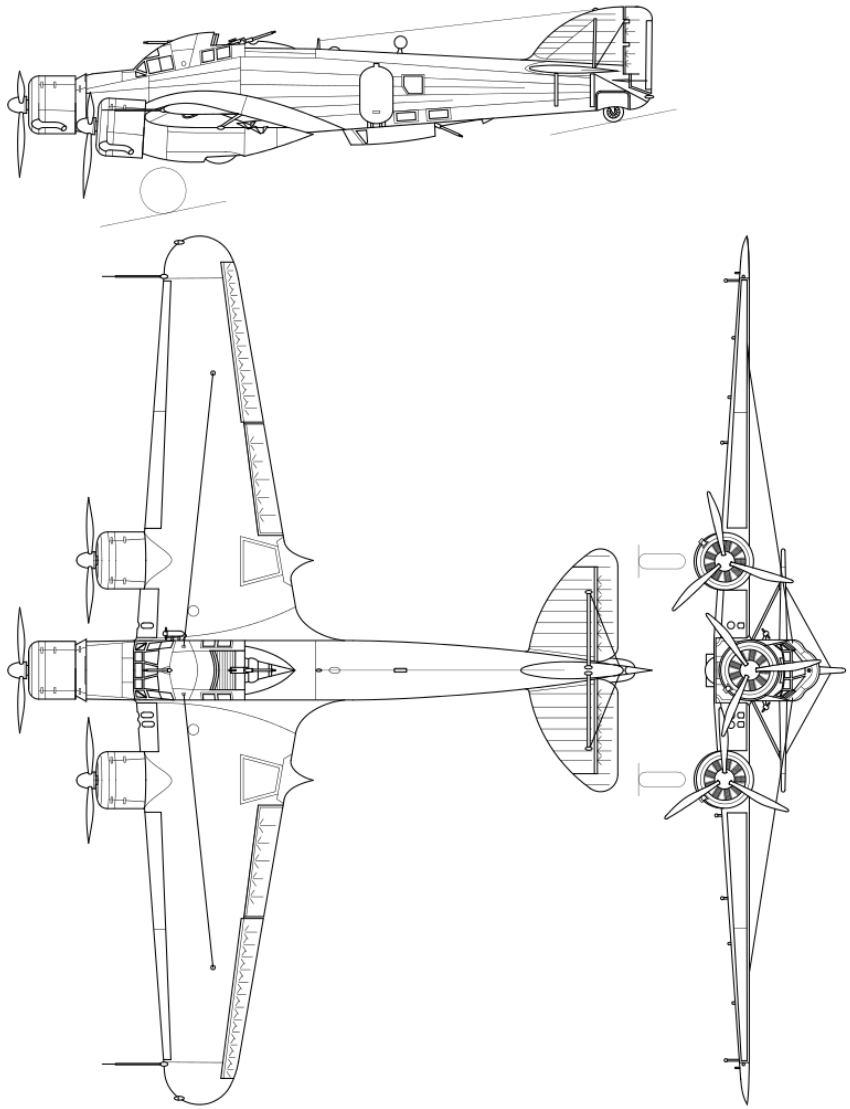
| | sesso | figli | IQ | occhi | salute | peso |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Maschio | 0 | 120 | Azzurri | Molto Buona | 68.04 |
| 2 | Maschio | 1 | NA | Neri | Molto Buona | 72.57 |
| 3 | Maschio | 0 | NA | Marroni | Media | 61.23 |
| 4 | Maschio | 0 | 150 | Neri | Cattiva | 63.50 |
| 5 | Maschio | 1 | 92 | Azzurri | Buona | 49.90 |
| 6 | Femmina | 0 | 130 | Marroni | Buona | 49.90 |
| 7 | Femmina | NA | NA | Azzurri | Molto Buona | 54.43 |
| 8 | Femmina | 0 | NA | Marroni | Media | 54.43 |
| 9 | Femmina | 0 | 84 | Neri | Media | 47.63 |
| 10 | Femmina | 1 | 70 | Neri | Buona | 45.36 |

Diminuisce la numerosità $n$ dei nostri dati. Vi vengono in mente altri potenziali problemi?

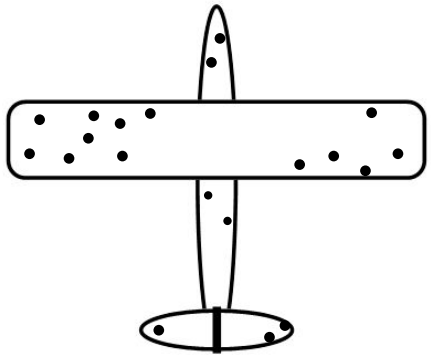
# WWII

- Quanto segue è realmente accaduto durante la seconda guerra mondiale
- Obiettivo: proteggere gli aerei da caccia degli alleati negli scontri con i caccia della Luftwaffe
- Un caccia (Savoia-Marchetti S.M.79) è un velivolo leggero e agile
- Per evitare l'abbattimento, questi aerei venivano corazzati con robuste lastre di ferro
- Problema: quante corazze e dove le mettiamo? Se un aereo non è corazzato, è facile da abbattere; se è troppo corazzato, è difficile da manovrare
- Per un aereo abbiamo 4 settori: (A) ali (B) alimentazione (C) fusoliera (D) motore. Possiamo mettere la corazza in un solo settore. Dove la mettiamo?
- Guardiamo i dati degli aerei

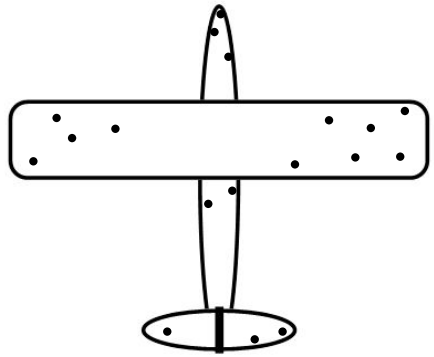
# Savoia-Marchetti S.M.79



# I dati

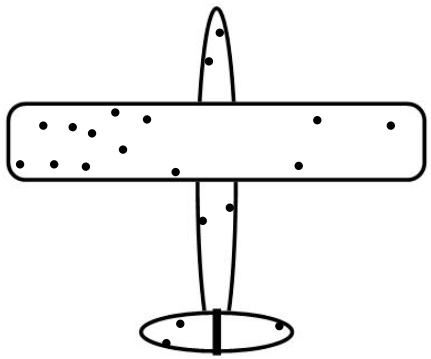


(a)



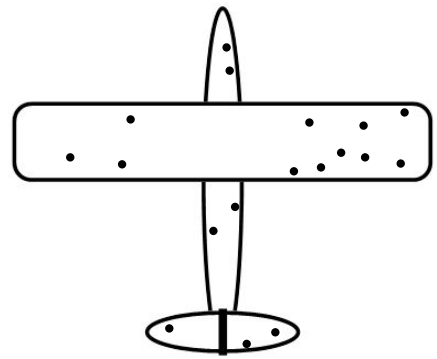
(b)

(c)



(d)

(e)



(f)

# Tabella dei dati

| Zona dell'aereo | Numero di colpi/dm$^2$ |
|---|---|
| Ali | 0.167 |
| Alimentazione | 0.143 |
| Fusoliera | 0.161 |
| Motore | 0.103 |

Nota: la media delle densità di colpi (numero di colpi per decimetro quadrato) è calcolata escludendo i valori (aerei) mancanti

Grazie a questa tabella, lo statistico Abraham Wald fu in grado di posizionare la protezione nel punto più rischioso

Fonte: D. Hand (2019) Il tradimento dei numeri. I dark data e l'arte di nascondere la verità. Rizzoli

# L'opinione di uno statistico

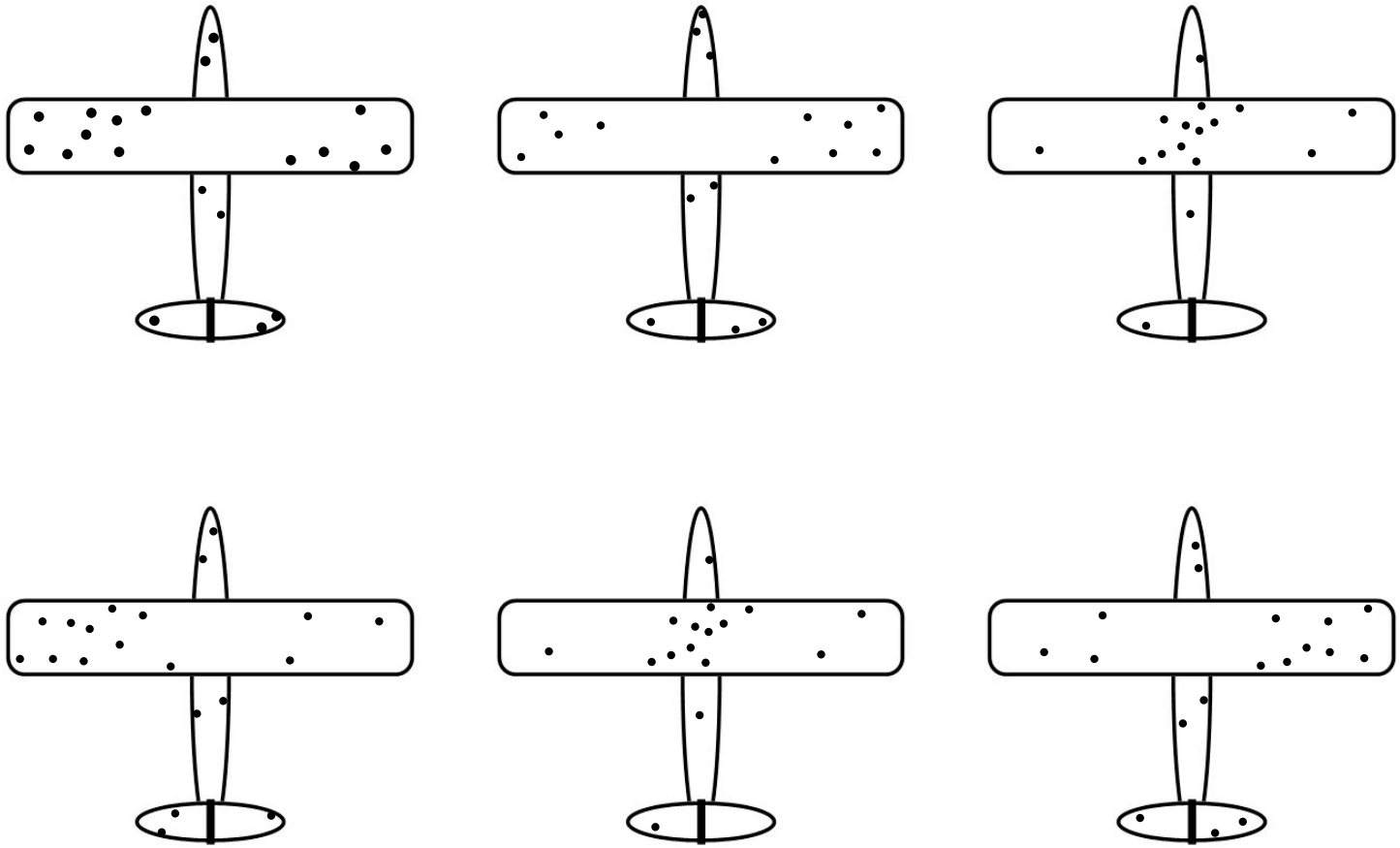
*The armor doesn't go where the bullet holes are.*
*It goes where the bullet holes aren't.*

*The observed holes showed where the planes were strongest;*
*that's where the planes could be shot and still survive the flight home.*
*The missing holes showed where the planes were weaker;*
*that's where the planes that didn't make it back were hit.*

Abraham Wald

Pensate di far visita ad un ospedale militare durante una guerra:
vi aspettate di osservare più feriti alle gambe o alla testa?

# Gli aerei mancanti (non a caso)



# Valori mancanti (completamente) a caso

Si parla di valori mancanti (completamente) a caso se i valori mancanti sono un campione casuale dei $n \times p$ valori possibili.

In tale situazione non ci sono problemi se escludiamo le osservazioni che presentano almeno un valore mancante (tranne il fatto che diminuisce la numerosità $n$)

# Dati `Titanic`


| pclass | name | sex | age | sibsp | parch | ticket | fare | embarked |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Storey | male | 60.5 | 0 | 0 | 3701 | | S |
| 1 | Natsch | male | 37.0 | 0 | 1 | PC 17596 | 29.7 | C |
| 3 | Johansson | male | 31.0 | 0 | 0 | 347063 | 7.8 | S |
| 2 | Clarke | female | 28.0 | 1 | 0 | 2003 | 26.0 | S |
| 3 | Danbom | female | 28.0 | 1 | 1 | 347080 | 14.4 | S |

# Imputazione di dati mancanti

- Il passeggerro Mr. Thomas Storey presenta un valore mancante sul prezzo del biglietto (variabile `fare`)
- Tuttavia sappiamo che si è imbarcato a Southampton (variabile `embarked`) e viaggiava in terza classe (variabile `pclass`).
- Potrebbe essere sensato sostituire il valore mancante con il prezzo mediano pari a 8.1

| pclass | embarked | median fare |
|---|---|---|
| 1 | C | 76.7 |
| 2 | C | 15.3 |
| 3 | C | 7.9 |
| 1 | Q | 90.0 |
| 2 | Q | 12.3 |
| 3 | Q | 7.8 |
| 1 | S | 52.0 |
| 2 | S | 15.4 |
| 3 | S | 8.1 |

# Outline



# Valori anomali (*outliers*)

Ogni insieme di valori ha un massimo e un minimo, però può capitare di osservare uno o più valori veramente anomali (*outliers*)

**Valore anomalo (*outlier*)**

E' un valore che si discosta dal baricentro della distribuzione più di quanto possa essere giustificato dalla variabilità dei dati.

# Perchè sono valori anomali?

Ci possono essere diverse spiegazioni, ad esempio:

**Errore di rilevazione**
e.g. per la variabile altezza, ho imputato 18.4 m invece di 1.84 m

**Elevata variabilità intrinseca del fenomeno (code pesanti)**

e.g. pensate alla variabile reddito

**Valori provenienti da una distribuzione diversa (contaminazione)**

e.g. pensate al peso per animali viventi e animali estinti (dinosauri)

# Come si individuano i valori anomali?

Metodi basati sull'esplorazione grafica:

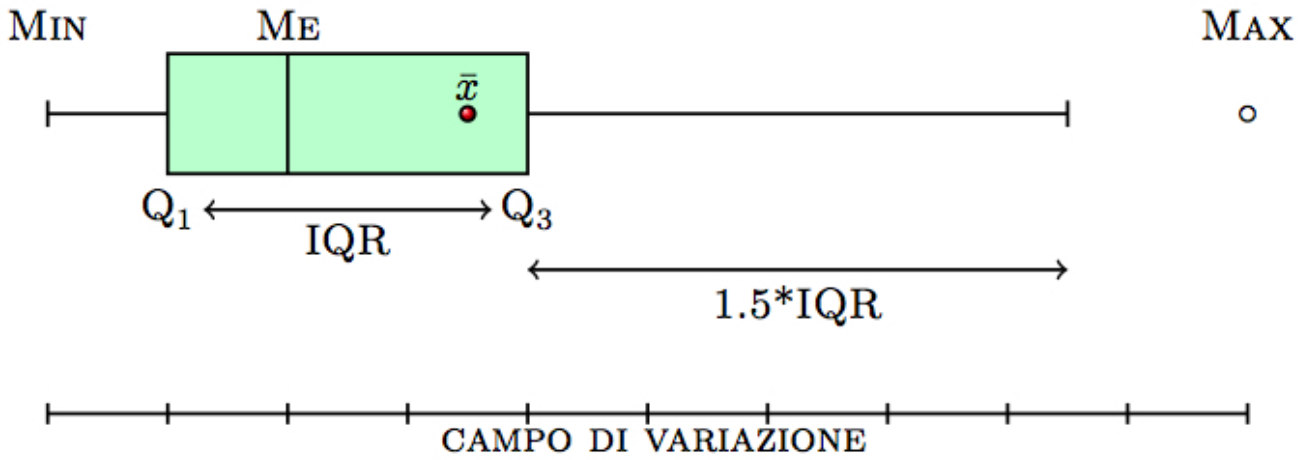
**Per una singola variabile**

- Diagramma a scatola con baffi (*boxplot*)

**Per due variabili**

- Diagramma di dispersione
- *Bagplot*

# Diagramma a scatola con baffi (*boxplot*)




- $\mathrm{Me}$, $Q_1$ e $Q_3$ sono la mediana, il primo e il terzo quartile
- $\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1$ è il *range* interquartile
- Il baffo a sinistra è il valore massimo tra Min e $Q_1 - 1.5 \cdot \mathrm{IQR}$
- Il baffo a destra è il valore minimo tra Max e $Q_3 + 1.5 \cdot \mathrm{IQR}$

# Boxplot e valori anomali

Il diagramma a scatola e baffi (*boxplot*) identifica un valore anomalo (indicandolo con $\circ$) con la seguente regola:

Un valore $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ è anomalo se:

- $x_i < Q_1 - 1.5 \cdot \mathrm{IQR}$ oppure se
- $x_i > Q_3 + 1.5 \cdot \mathrm{IQR}$

# Comando `boxplot()` con `R`

- Se la numerosità campionaria $n$ è un numero dispari, la descrizione coincide con quella delle slides precedenti;
- Se invece la numerosità campionaria $n$ è un numero pari, i valori di $Q_1$ e $Q_3$ che calcola il comando `boxplot()` potrebbero essere leggermente diversi dal primo e il terzo quartile
- Potete utilizzare il comando `boxplot.stats()` per ottenere i 5 valori che compongono il *boxplot* (Min, baffo sx, Me, baffo dx, Max)

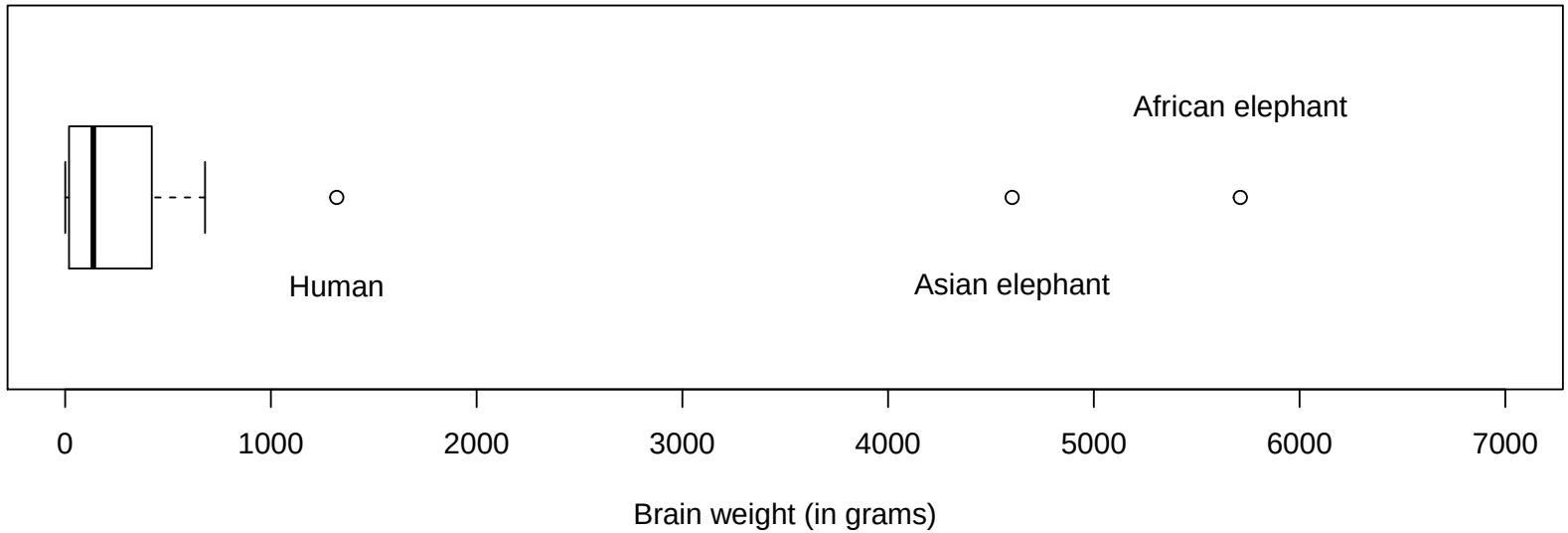
# Dati Animals

- `Animals` è un *dataset* presente nella libreria `MASS`
- Per una descrizione del *dataset*, digitare `?Animals`
- *Average brain and body weights for 28 species of land animals*
- `body` : body weight in kg
- `brain` : brain weight in g
- $n = 28$ osservazioni misurate su $p = 2$ variabili

# Dati `Animals`

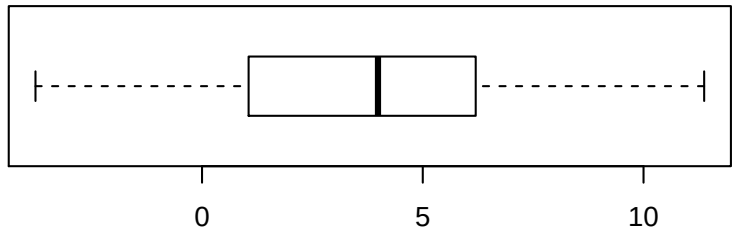
| | body | brain |
|---|---|---|
| Mountain beaver | 1.35 | 8.10 |
| Cow | 465.00 | 423.00 |
| Grey wolf | 36.33 | 119.50 |
| Goat | 27.66 | 115.00 |
| Guinea pig | 1.04 | 5.50 |
| Dipliodocus | 11700.00 | 50.00 |
| Asian elephant | 2547.00 | 4603.00 |
| Donkey | 187.10 | 419.00 |
| Horse | 521.00 | 655.00 |
| Potar monkey | 10.00 | 115.00 |
| Cat | 3.30 | 25.60 |
| Giraffe | 529.00 | 680.00 |
| Gorilla | 207.00 | 406.00 |
| Human | 62.00 | 1320.00 |
| African elephant | 6654.00 | 5712.00 |
| Triceratops | 9400.00 | 70.00 |
| Rhesus monkey | 6.80 | 179.00 |
| Kangaroo | 35.00 | 56.00 |
| Golden hamster | 0.12 | 1.00 |
| Mouse | 0.02 | 0.40 |
| Rabbit | 2.50 | 12.10 |
| Sheep | 55.50 | 175.00 |
| Jaguar | 100.00 | 157.00 |
| Chimpanzee | 52.16 | 440.00 |
| Rat | 0.28 | 1.90 |
| Brachiosaurus | 87000.00 | 154.50 |
| Mole | 0.12 | 3.00 |
| Pig | 192.00 | 180.00 |

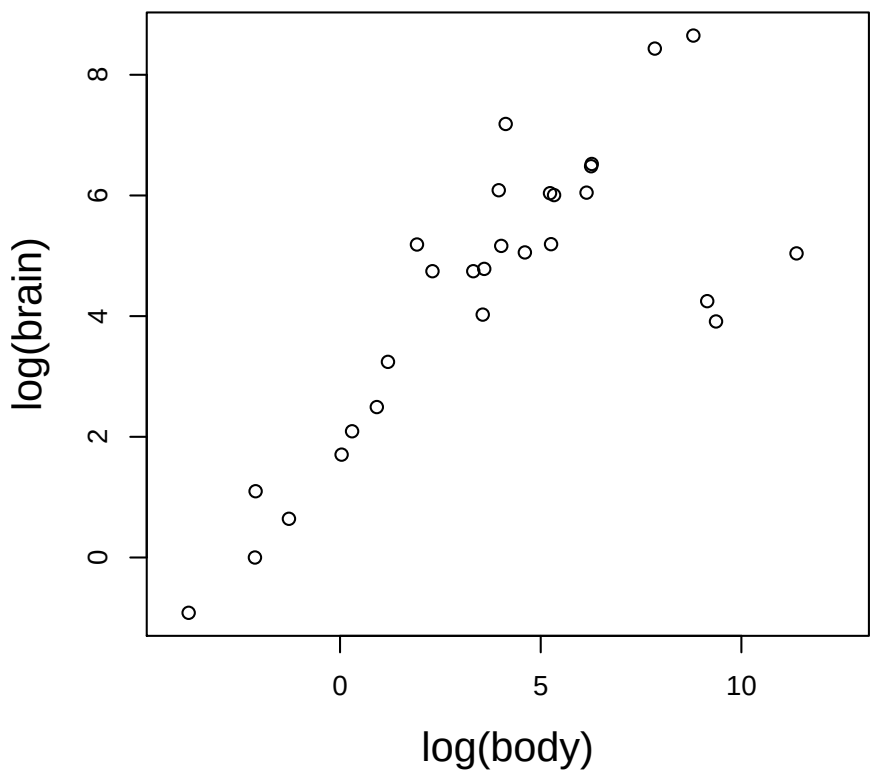
# Boxplot `brain`

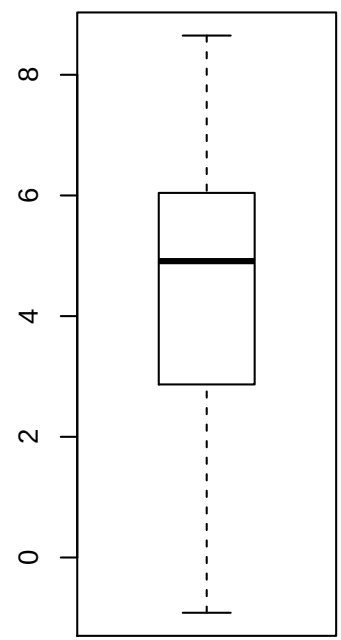



```
library("MASS")
boxplot(Animals$brain)
boxplot.stats(Animals$brain)
$stats
[1]   0.40  18.85 137.00 421.00 680.00
$out
[1] 4603 1320 5712
```

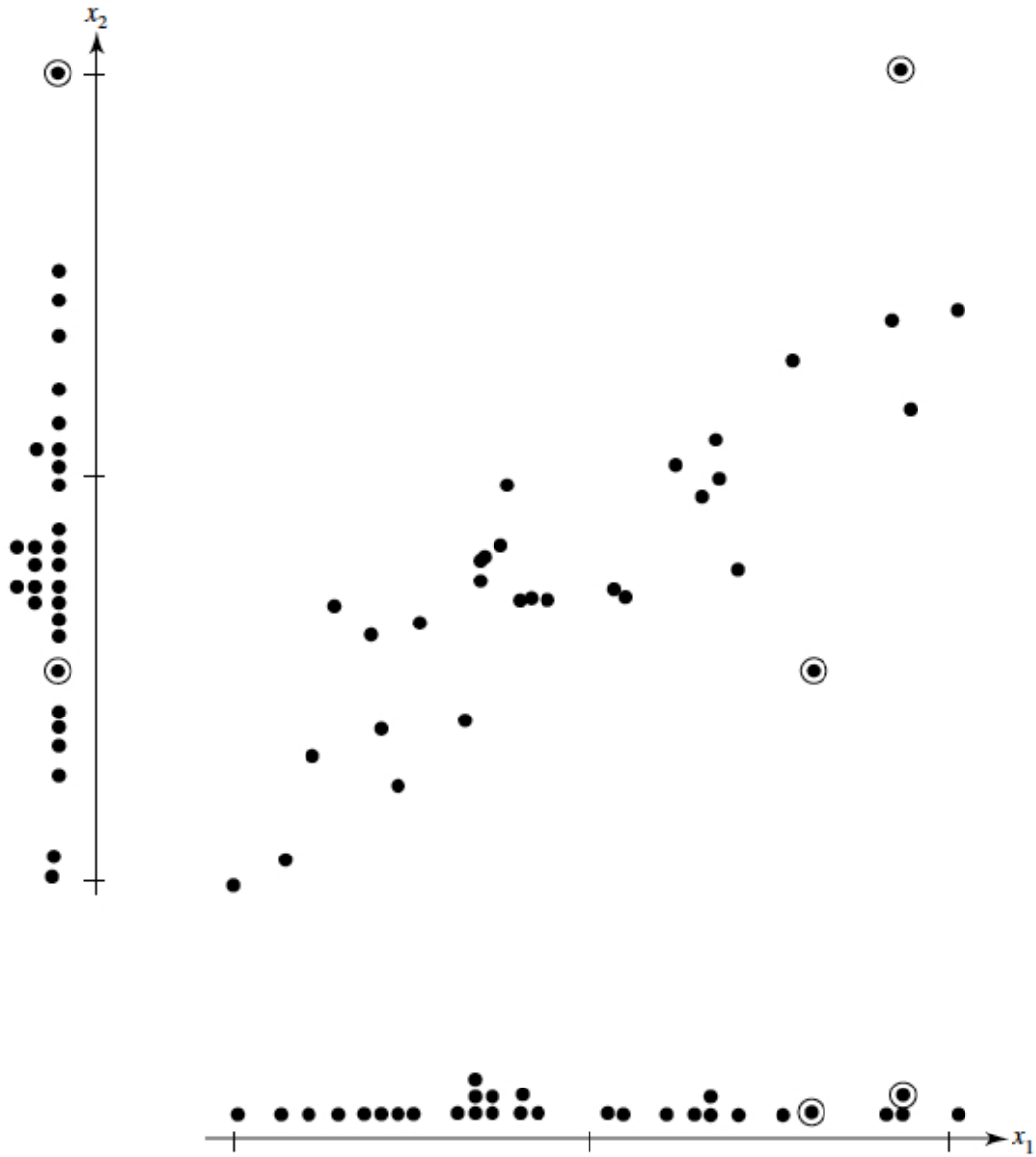
# Boxplot `brain` e `body`



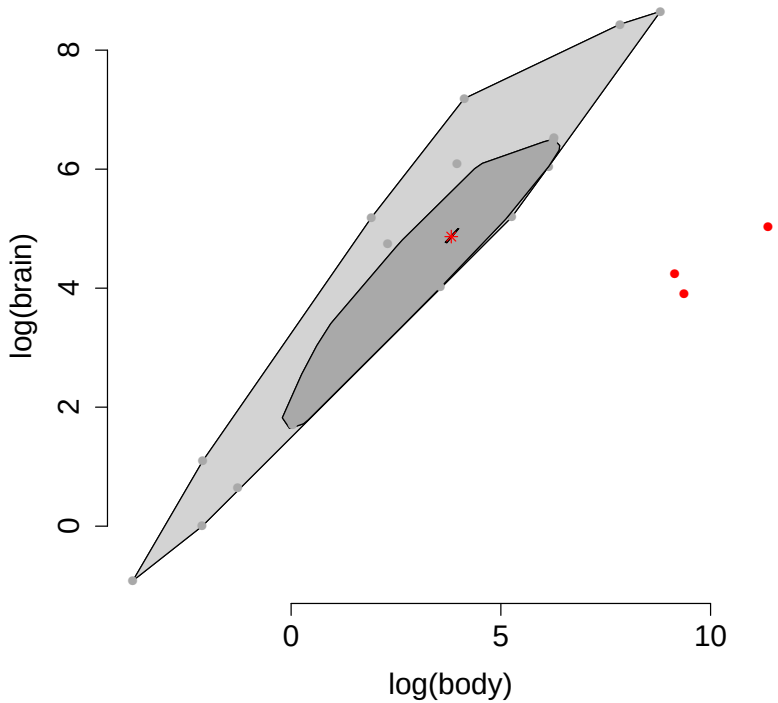



# Outlier bivariato

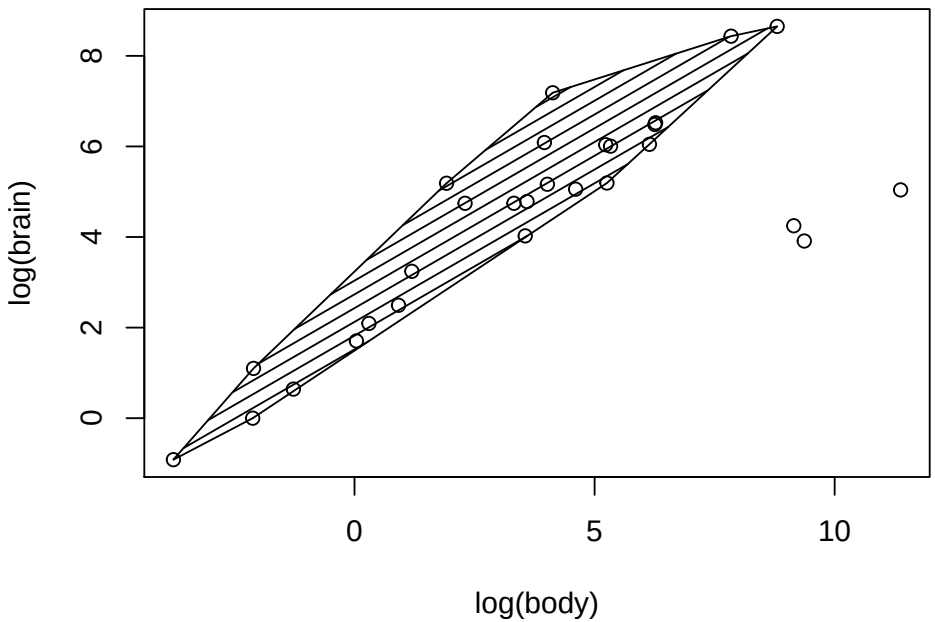


# Bagplot = boxplot bivariato



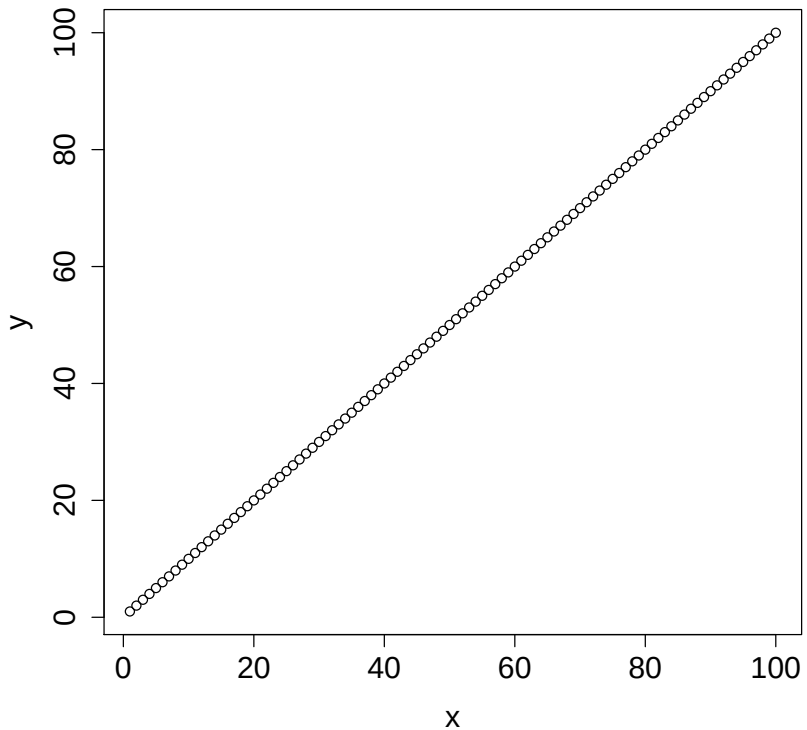

Il sacco (*bag*, area grigio scuro) contiene (al più) il $50\%$ delle osservazioni. Si costruisce calcolando la profondità di Tukey (*Tukey depth*, che non andremo a definire). L'asterisco al centro corrisponde all'osservazione con la *Tukey depth* più elevata (e non corrisponde al vettore delle mediane). Osservazioni al di fuori della recinzione (*fence*, che non si vede, ma in sostanza è 3 volte il *bag*) sono considerate anomale.

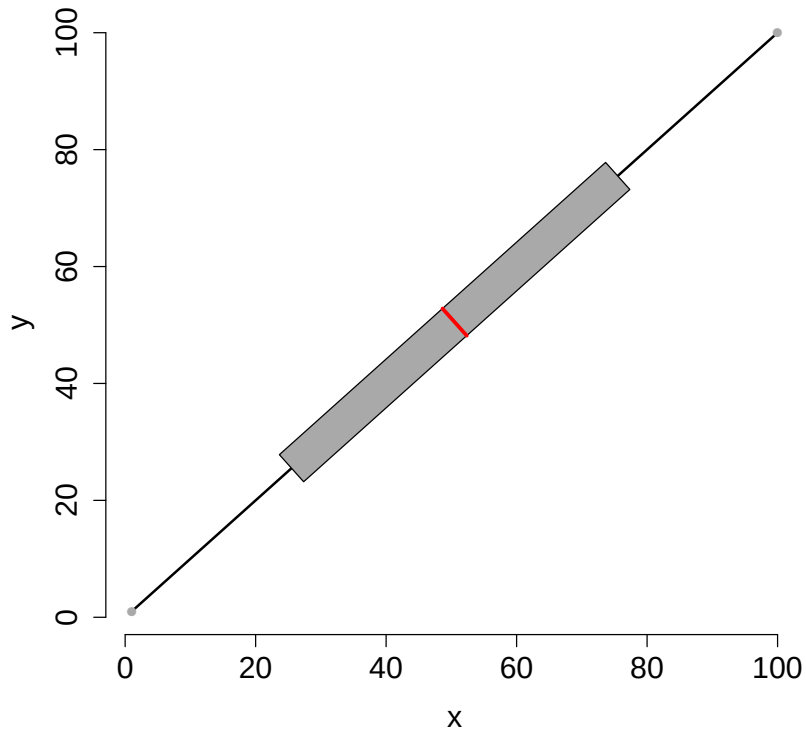
# Involucro convesso




Le osservazioni non anomale sono racchiuse nel cappio (*loop*), ovvero l'involucro convesso (*convex hull*), definito come il più piccolo insieme convesso contenente tutte le osservazioni non anomale

# Bagplot per dati unidimensionali



# Outline



# Matrice $X$

$$\underset{n\times p}{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

# Medie e varianze

- Media per la $j$-sima variabile

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, p$$

- Varianza per la $j$-sima variabile

$$s_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \qquad j = 1, \ldots, p$$

# Covarianze e correlazioni

- Covarianza tra la $j$-sima e la $k$-sima variabile

$$s_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k), \qquad j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, p$$

  Si noti che $s_{jk} = s_{kj}$ e che $s_{jj} = s_j^2$

- Correlazione tra la $j$-sima e la $k$-sima variabile

$$r_{jk} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}}\sqrt{s_{kk}}}, \qquad j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, p$$

  Si noti che $-1 \leq r_{jk} \leq 1$

# Vettore delle medie

$$\underset{p\times 1}{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \dots \\ \bar{x}_j \\ \dots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

# Matrice di varianze/covarianze

$$\underset{p\times p}{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ s_{j1} & s_{j2} & \cdots & s_{jj} & \cdots & s_{jp} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pj} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

# Matrice di correlazione

$$\underset{p\times p}{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ r_{j1} & r_{j2} & \cdots & 1 & \cdots & r_{jp} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pj} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Outline



# Dati

| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | 4 | 2 | 6 | 8 | 2 | 5 |
| $x_2$ | 5 | 5.5 | 4 | 7 | 10 | 5 | 7.5 |

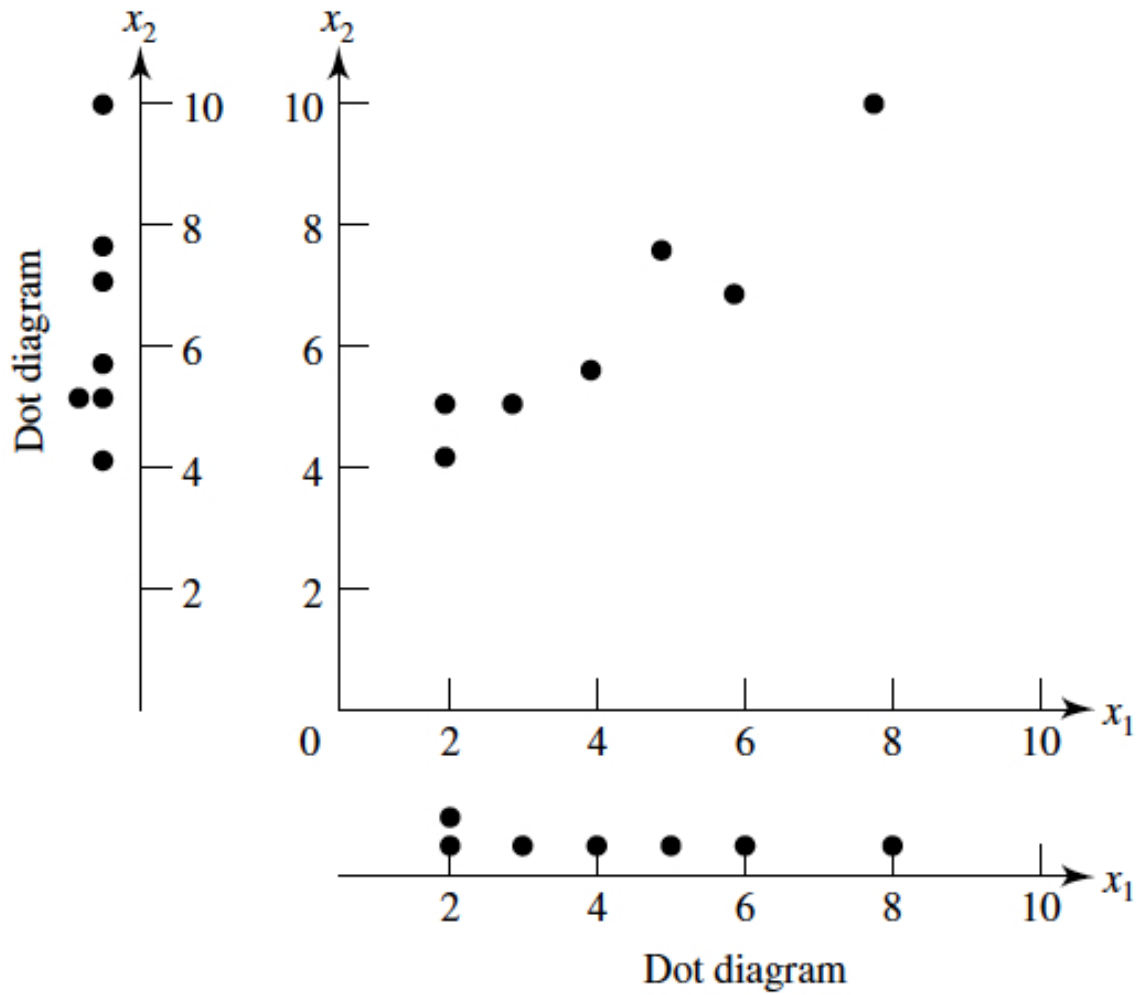
Medie: $\bar{x}_1 = 4.2$, $\bar{x}_2 = 6.2$

Varianze: $s_{11} = 4.2$, $s_{22} = 0.56$

Covarianza: $s_{12} = 3.70$

Correlazione: $r_{12} = 0.95$

# Diagramma di dispersione



# Dati

| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | 4 | 6 | 2 | 2 | 8 | 3 |
| $x_2$ | 5 | 5.5 | 4 | 7 | 10 | 5 | 7.5 |

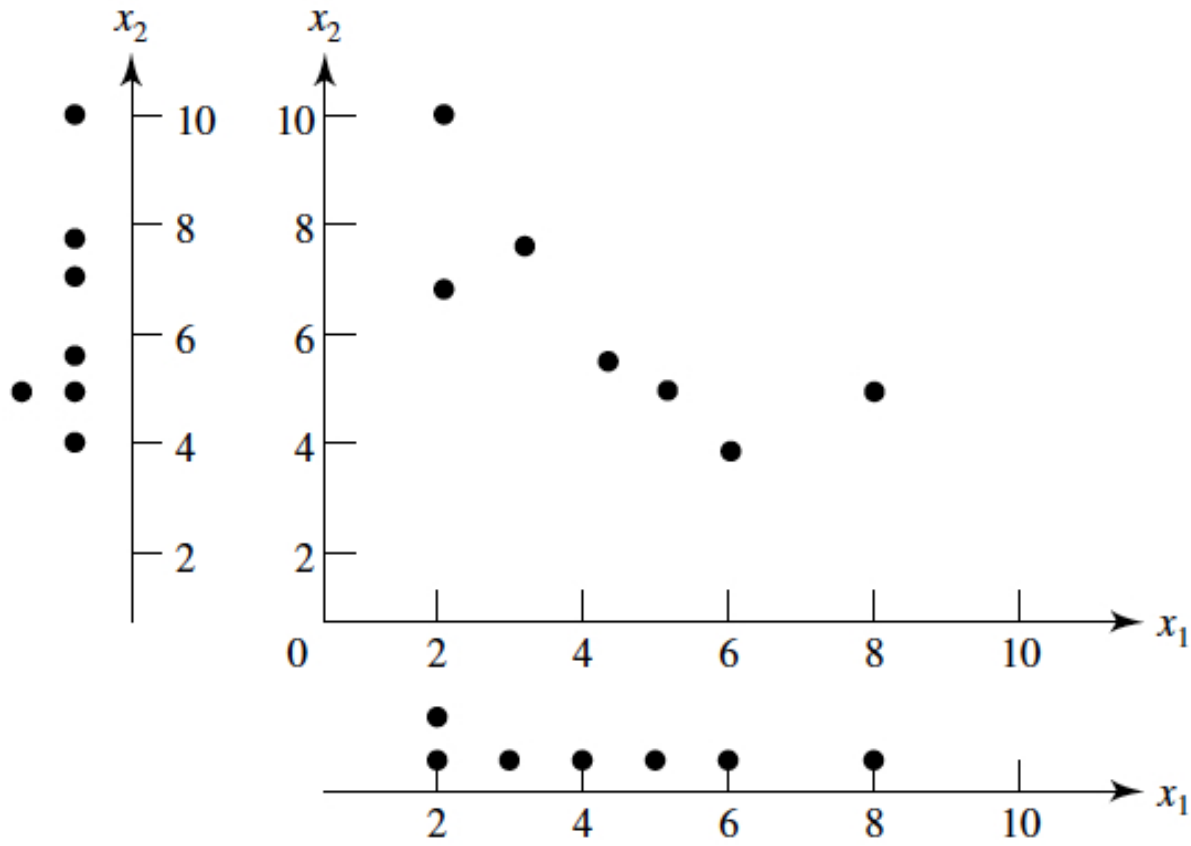
Medie: $\bar{x}_1 = 4.2$, $\bar{x}_2 = 6.2$

Varianze: $s_{11} = 4.20$, $s_{22} = 0.56$

Covarianza $s_{12} = -3.01$

Correlazione $r_{12} = -0.78$

# Diagramma di dispersione



# Indovina la correlazione

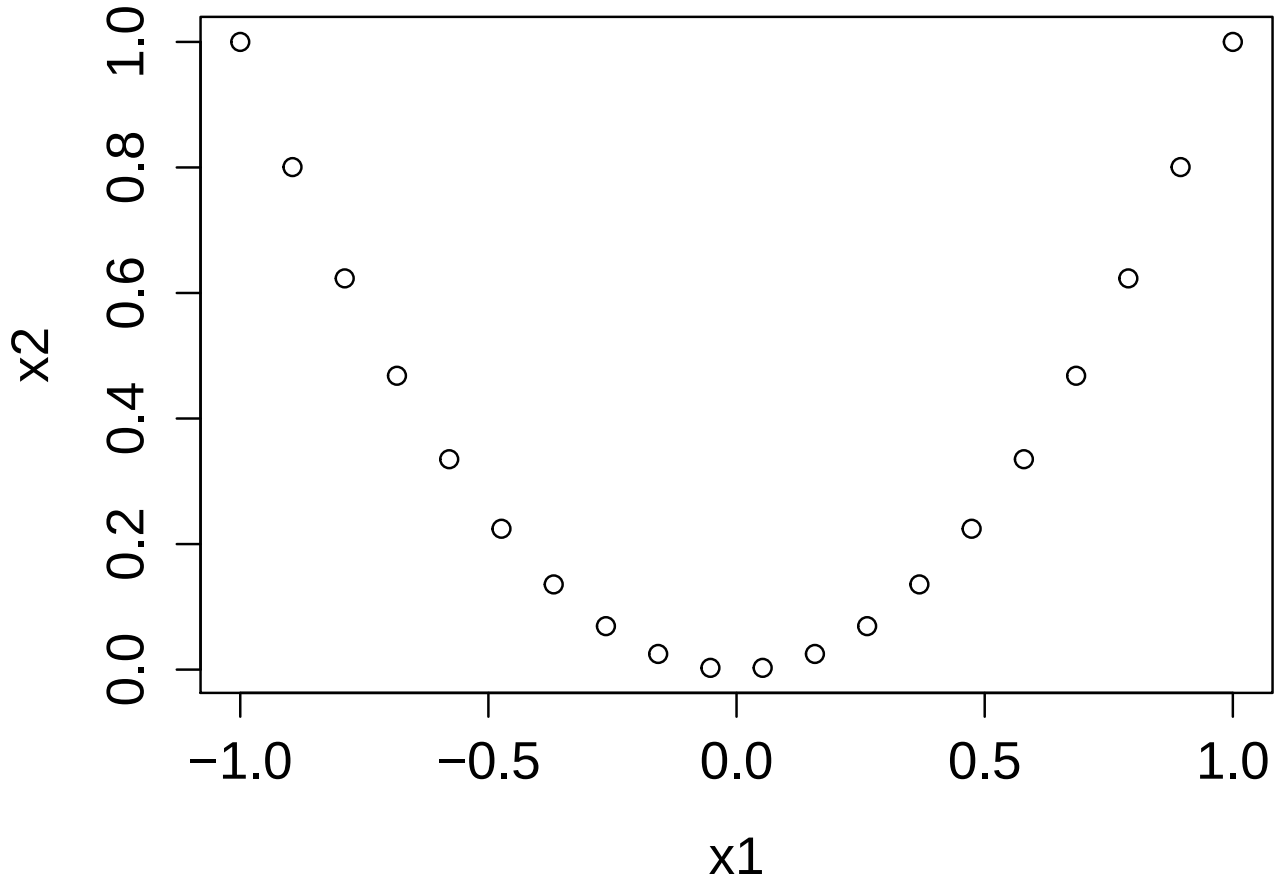
Guess the correlation

# Relazione quadratica

$$x_{1i} = -1 + 2\frac{(i-1)}{(n-1)}$$
$$x_{2i} = x_{1i}^2, \quad i = 1, \ldots, n$$

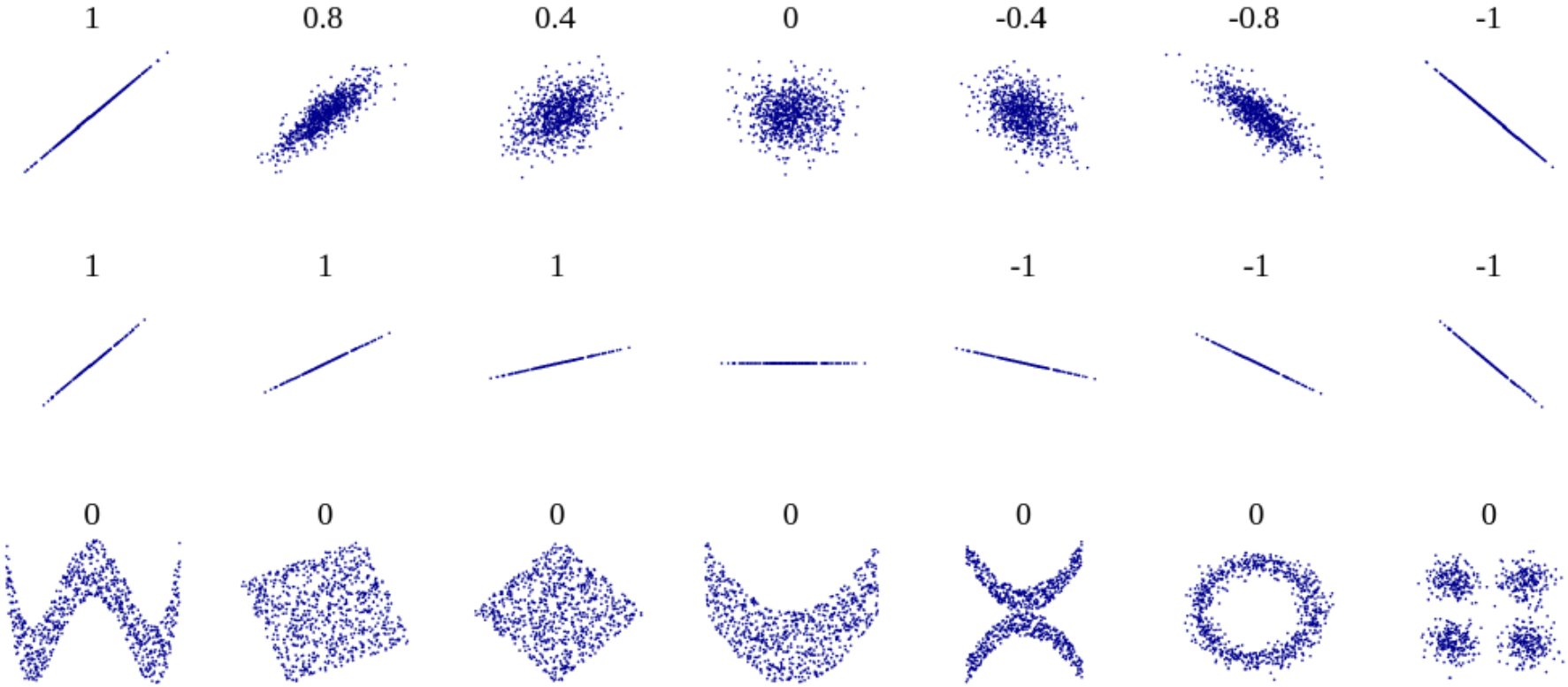
# Relazione quadratica

Per $n = 20$:

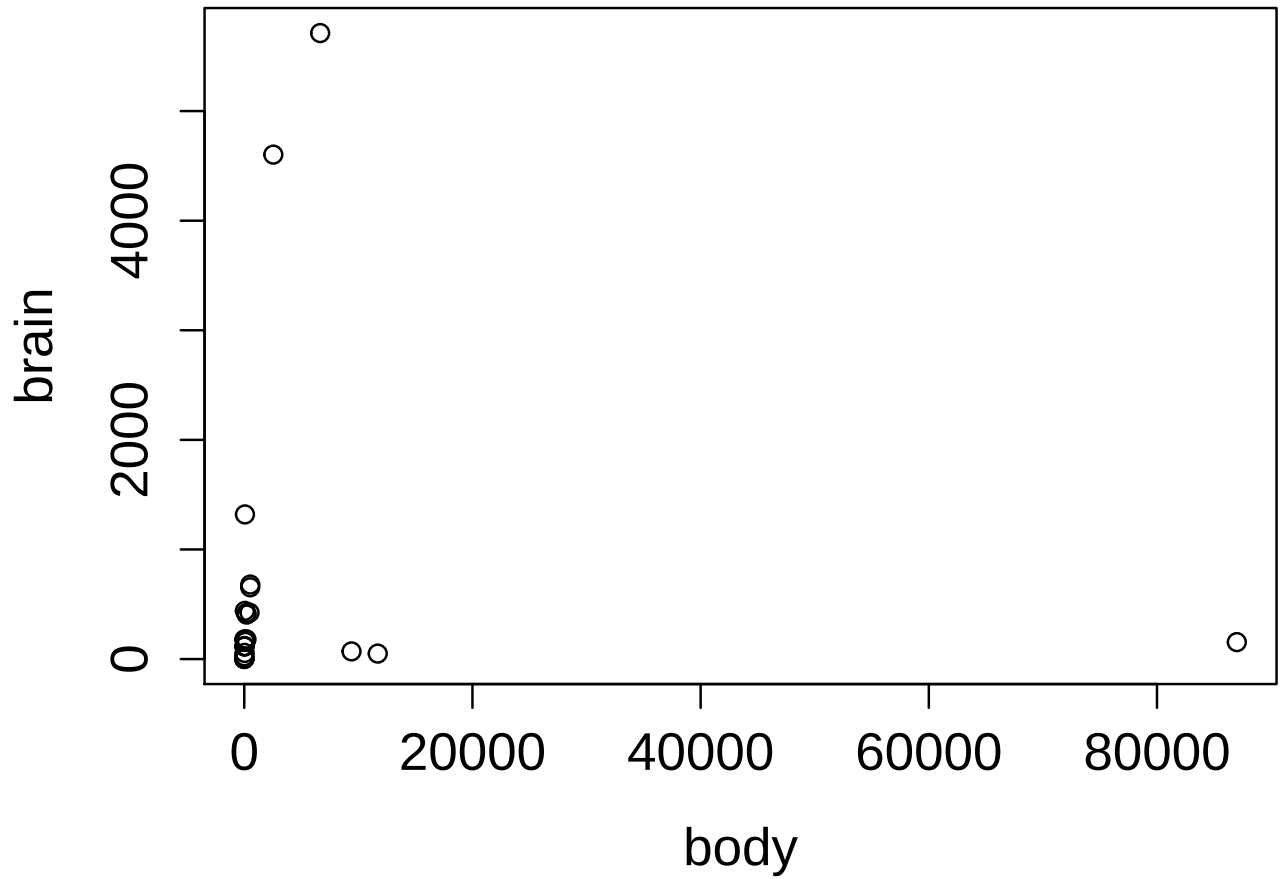



$$r_{12} \approx 0$$

# Correlazione = relazione LINEARE

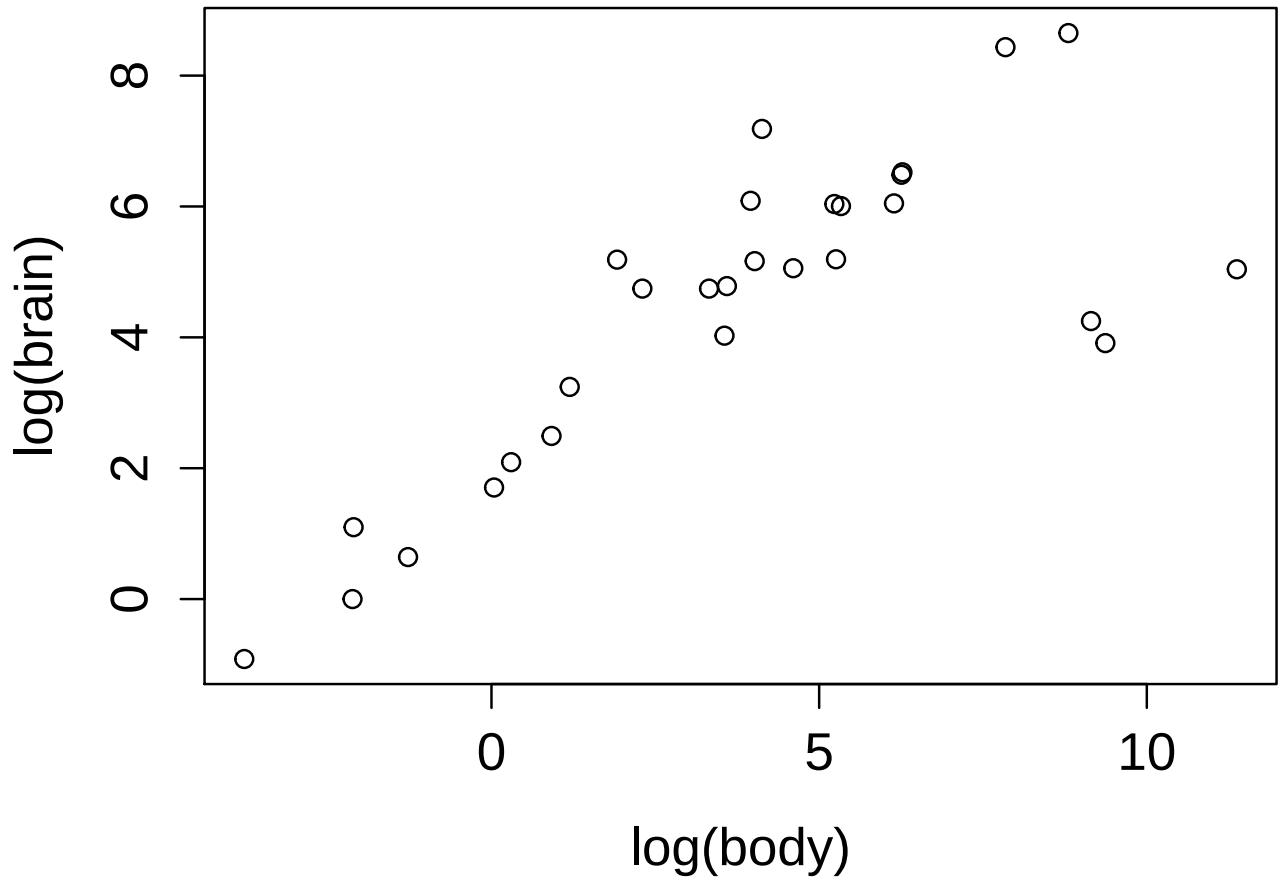


# `Animals`: diagramma di dispersione



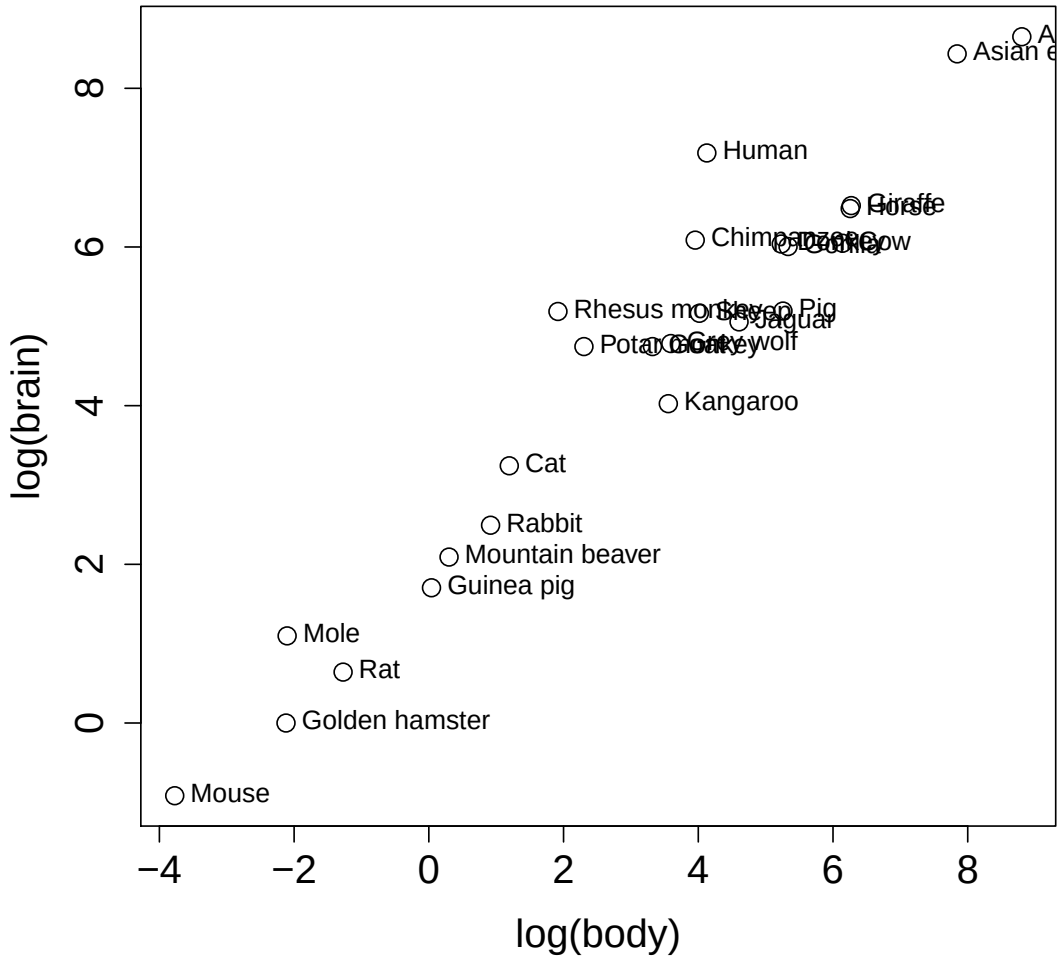

$$r_{12} = -0.0053$$

# `Animals`: trasformazione logaritmica




$$r_{12} = 0.779$$

# `Animals`: escludendo 3 osservazioni anomale




$$r_{12} = 0.932$$